BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

TRẦN TRỊNH MINH SƠN

CÁC TÍNH CHẤT CHÍNH QUY CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN TỐI ƯU

LUẬN ÁN TIẾN SĨ NGÀNH TOÁN HỌC

LÂM ĐỒNG - 2016

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

TRẦN TRỊNH MINH SƠN

CÁC TÍNH CHẤT CHÍNH QUY CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN TỐI ƯU

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 62.46.01.01

LUẬN ÁN TIẾN SĨ NGÀNH TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học:
GS. TSKH. PHAN QUỐC KHÁNH

LÂM ĐỒNG - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Các kết quả trình bày trong luận án là công trình nghiên cứu của tôi được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS. TSKH. Phan Quốc Khánh. Các kết quả trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong các công trình của người khác. Các kết quả được công bố chung trong hai bài báo [KLS1, KLS2] đã được đồng tác giả cho phép sử dụng trong luận án.

Tôi xin chịu trách nhiệm với những lời cam đoan của mình.

Lâm Đồng, tháng 09 năm 2016

Tác giả luận án

LỜI CẢM ƠN

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Đà Lạt và Trường Đại học Quốc tế - Đại học Quốc gia TP.HCM dưới sự hướng dẫn tận tình và chu đáo của GS. TSKH. Phan Quốc Khánh và sự quan tâm giúp đỡ của TS. Lê Minh Lưu. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các Thầy.

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, thông qua các bài giảng, hội nghị và seminar, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ cũng như có được những ý kiến đóng góp quý báu của các Thầy Cô ở Khoa Toán - Tin học Trường Đại học Đà Lạt và Phòng bộ môn Tối ưu và Hệ thống Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - ĐHQG TP.HCM. Tác giả xin chân thành cám ơn.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Lãnh đạo Trường Đại học Đà Lạt, Phòng Quản lý Đào tạo, Phòng NCKH - HTQT, Phòng Quản lý Đào tạo - SĐH, Khoa Toán - Tin học, Trưởng ngành Toán Giải tích Trường Đại học Đà Lạt, Phòng Bộ môn Tối ưu và Hệ thống Trường Đại học Khoa học Tự nhiên TP.HCM, Phòng bộ môn Toán Trường Đại học Quốc tế - ĐH QG TP.HCM, Ban lãnh đạo Viện nghiên cứu cao cấp về Toán VIASM, Ban giám đốc Sở Giáo dục và Đào tạo tỉnh Lâm Đồng, Ban giám hiệu Trường THPT Chuyên Thăng Long Đà Lạt và Tổ Toán Trường THPT Chuyên Thăng Long Đà Lạt đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong thời gian làm nghiên cứu sinh.

Xin được cám ơn bạn bè, đồng nghiệp, anh chị em trong nhóm Tối ưu miền Nam và gia đình đã trao đổi, giúp đỡ, động viên và khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận án.

Lâm Đồng, tháng 09 năm 2016

Mục lục

LỜI CAM ĐOAN **i**

LỜI CẢM ƠN **ii**

DANH SÁCH CÁC KÝ HIỆU **v**

TÓM TẮT **vii**

SUMMARY **ix**

MỞ ĐẦU **1**

1 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ **9**

1.1 Sự hội tụ của dãy tập và dãy ánh xạ đa trị 9

1.2 Hội tụ biến phân của dãy hàm và dãy song hàm có giá trị hữu hạn . 12

1.3 Tính liên tục của ánh xạ đa trị 15

1.4 Tính lồi suy rộng theo nón của ánh xạ đa trị 19

2 TÍNH XẤP XỈ CỦA BÀI TOÁN TỰA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN ĐA TRỊ VÀ CÁC ÁP DỤNG **22**

2.1 Hội tụ lopside của các song hàm có giá trị hữu hạn trên miền không chữ nhật 23

2.2 Tính xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị 26

2.3 Tính xấp xỉ của bài toán cân bằng Nash mở rộng 33

2.4 Tính xấp xỉ của nền kinh tế thuần túy trao đổi 36

2.5 Tính xấp xỉ của bài toán cân bằng giao thông 39

3 TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ TÍNH ĐẶT CHỈNH LEVITIN-POLYAK CỦA TRÒ CHƠI ĐA MỤC TIÊU MỞ RỘNG CÓ THAM SỐ 47

3.1 Trò chơi đa mục tiêu mở rộng 48

3.2 Tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm xấp xỉ 52

3.3 Tính đặt chỉnh Levitin-Polyak của trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số 54

4 CẬN SAI SỐ VÀ TÍNH ĐẶT CHỈNH CỦA MẠNG GIAO THÔNG 64

4.1 Tính duy nhất nghiệm và cận sai số của mạng giao thông 65

4.2 Nghiệm xấp xỉ của mạng giao thông 71

4.3 Tính đặt chỉnh của mạng giao thông có tham số 80

5 TÍNH LIÊN THÔNG CỦA CÁC TẬP NGHIỆM XẤP XỈ CỦA BẤT ĐẲNG THỨC KY FAN ĐA TRỊ 86

5.1 Bất đẳng thức Ky Fan đa trị 86

5.2 Vô hướng hóa tuyến tính cho tập nghiệm yếu xấp xỉ 88

5.3 Tính nửa liên tục dưới và tính trù mật 89

5.4 Tính liên thông của tập nghiệm xấp xỉ và tập nghiệm yếu xấp xỉ . . . 97

KẾT LUẬN CHUNG 101

CÁC NGHIÊN CỨU TIẾP THEO 102

CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN 103

CÁC BÁO CÁO HỘI THẢO LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN 104

TÀI LIỆU THAM KHẢO 105

DANH SÁCH CÁC KÝ HIỆU

$\mathbb{N}$	tập các số tự nhiên
$\mathbb{R}$	tập các số thực
$\mathbb{R}_+$	tập các số thực không âm
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\mathbb{B}^n$	không gian Banach n chiều
X^*	không gian đối ngẫu của không gian X
$\langle \xi, x \rangle$	giá trị của $\xi \in X^*$ tại $x \in X$
$\square$	kết thúc chứng minh
fv-biv$(\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$	tập các song hàm có giá trị hữu hạn
ψ, φ	các song hàm có giá trị hữu hạn
$f^\nu \xrightarrow{h} f$ hoặc $f = \text{h-lim}_\nu f^\nu$	f^ν hội tụ hypo đến f
argmin$f$	tập các điểm cực tiểu của hàm f
argmax$f$	tập các điểm cực đại của hàm f
dom$f$	miền hữu hiệu của hàm số f
epi$f$	trên đồ thị của hàm số f
hypo$f$	dưới đồ thị của hàm số f
$\partial f(x)$	dưới vi phân của hàm lồi f tại điểm x
$L_f^a(x)$	tập mức dưới điều chỉnh của f tại x
$N_f^a(x)$	toán tử nón pháp tuyến tương ứng với f tại x
inf$A$	cận dưới lớn nhất của tập số thực A
sup$A$	cận trên nhỏ nhất của tập số thực A
cl$A$	bao đóng của tập A
int$A$	phần trong của tập A
conv$A$	bao lồi của tập A
$N_A(x)$	nón pháp tuyến của tập A tại x
$\mathrm{d}(x, A)$	khoảng cách từ điểm x đến tập A

$\mathrm{diam}(A)$	đường kính của tập A
$\bar{B}(a,r)$	hình cầu đóng tâm a bán kính r
$B(a,r)$	hình cầu mở tâm a bán kính r
$S(a,r)$	mặt cầu tâm a bán kính r
x^ν, x^n	dãy số thực, hoặc dãy véctơ
$A := B$	A được định nghĩa bằng B
$\mathcal{H}(A,B)$	khoảng cách Hausdorff giữa hai tập hợp A và B
C^*	nón đối ngẫu của nón C
$C^\sharp$	nón đối ngẫu chặt của nón C
$C^\nu \xrightarrow{P-K} C$	Các tập C^ν hội tụ Painleve-Kuratowski đến tập C
$G : X \rightrightarrows Y$	ánh xạ đa trị đi từ tập X và tập Y
$\mathrm{dom}G$	miền hữu hiệu của ánh xạ đa trị G
$\mathrm{gph}G$	đồ thị của ánh xạ đa trị G
$G^{-1} : Y \rightrightarrows X$	ánh xạ ngược của G
$\mathrm{P} : X \times Y \rightrightarrows X$	phép chiếu từ $X \times Y$ vào X
$G^\nu \overset{g}{\rightrightarrows} G$	Các ánh xạ G^ν hội tụ graph đến ánh xạ G
$G^\nu \overset{c}{\rightrightarrows} G$	Các ánh xạ G^ν hội tụ liên tục đến ánh xạ G
$\mathrm{Limsup}_\nu G^\nu$	giới hạn trên của các ánh xạ đa trị G^ν
$\mathrm{Liminf}_\nu G^\nu$	giới hạn dưới của các ánh xạ đa trị G^ν
$\mathrm{Lim}_\nu G^\nu$	giới hạn P-K của các ánh xạ đa trị G^ν
$\mathrm{QVI}(T,K)$	bài toán tựa bất đẳng thức biến phân
$\mathcal{Q}$	tập nghiệm của $\mathrm{QVI}(T,K)$
$\mathrm{TNP}(T,K)$	bài toán mạng giao thông
$\mathcal{T}$	tập các dòng cân bằng của $\mathrm{TNP}(T,K)$
$\mathrm{GNEP}(\theta,X)$	bài toán cân bằng Nash mở rộng
$\mathcal{G}$	tập các cân bằng Nash mở rộng của $\mathrm{GNEP}(\theta,X)$
$\mathrm{PEE}(u,P\times M)$	nền kinh tế thuần túy trao đổi
$\mathcal{P}$	tập các điểm cân bằng cạnh tranh của $\mathrm{PEE}(u,P\times M)$
$\mathrm{MGG}(f,G)$	trò chơi đa mục tiêu mở rộng
$\mathcal{M}$	tập các dòng cân bằng Pareto-Nash yếu của $\mathrm{MGG}(f,G)$
$\mathrm{KFI}(F,A,B)$	bất đẳng thức Ky Fan đa trị
$\mathcal{K}$	tập nghiệm của $\mathrm{KFI}(F,A,B)$

TÓM TẮT

Luận án trình bày một số kết quả mới về các tính chất chính quy của nghiệm một số bài toán trong tối ưu hóa. Các tính chất ở đây là một số tính chất quan trọng có liên quan với nhau: tính xấp xỉ, tính ổn định nghiệm, tính đặt chỉnh, tính duy nhất nghiệm, tính chất liên thông của nghiệm và cận sai số của biến chấp nhận được. Các bài toán chúng tôi xét không phải là bài toán cực tiểu, mô hình chính nhất trong tối ưu hóa, mà là một số mô hình khác có ý nghĩa thực tế cao và cũng thường gọi là các bài toán liên quan đến tối ưu: từ bất đẳng thức Ky Fan (còn được gọi là bài toán cân bằng), tựa bất đẳng thức biến phân là các mô hình tổng quát hơn bài toán cực tiểu đến các bài toán rất thực tiễn là trò chơi không hợp tác (cũng còn được gọi là bài toán cân bằng Nash), bài toán mạng giao thông và nền kinh tế thuần túy trao đổi. Luận án có 5 chương.

Chương 1 trình bày một số định nghĩa và kiến thức chuẩn bị phục vụ cho các chương sau.

Chương 2 nghiên cứu về tính xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và áp dụng cho các bài toán thực tiễn: bài toán cân bằng Nash mở rộng, nền kinh tế thuần túy trao đổi và bài toán mạng giao thông. Chương này đưa ra định nghĩa về các song hàm có giá trị hữu hạn trên miền không chữ nhật cho các bài toán trên, chứng minh xấp xỉ theo nghĩa hội tụ lopside của các song hàm tương ứng các bài toán xấp xỉ đến song hàm của bài toán gốc và thiết lập hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski cho các tập nghiệm tương ứng.

Chương 3 nghiên cứu trò chơi đa mục tiêu mở rộng trong không gian véctơ tôpô.

Điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của tập các điểm cân bằng Pareto-Nash yếu xấp xỉ và điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh Levitin-Polyak được chứng minh dưới giả thiết compắc. Trong trường hợp trò chơi được xét trong không gian mêtric, tính đặt chỉnh Levitin-Polyak được thiết lập dựa vào các độ đo không compắc.

Chương 4 gồm hai mảng kết quả. Đầu tiên chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ về tính duy nhất nghiệm và các cận sai số cho các dòng chấp nhận được của mạng giao thông bằng cách sử dụng hàm đánh giá cho tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng. Tiếp theo chúng tôi đưa ra các định nghĩa về dòng cân bằng Wardrop xấp xỉ của mạng giao thông và trình bày mối quan hệ của dòng cân bằng xấp xỉ với nghiệm xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng và thiết lập điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh Tikhonov theo nghĩa Levitin–Polyak của mạng giao thông có tham số.

Chương 5 nghiên cứu vô hướng hóa cho các tập nghiệm yếu xấp xỉ của các bất đẳng thức Ky Fan đa trị dưới các giả thiết lồi suy rộng, trình bày tính trù mật của các tập nghiệm xấp xỉ và thiết lập điều kiện đủ cho tính liên thông của các tập nghiệm xấp xỉ và các tập nghiệm yếu xấp xỉ của các bài toán này mà không sử dụng các giả thiết về tính đơn điệu và tính compắc.

SUMMARY

This thesis presents some new results on regularity properties of solutions of some problems in optimization. Here the following important properties (which are closely related to each other) are investigated: approximation properties, stability of solutions, well-posedness of problems, uniqueness of solutions, connectedness of solutions and error bounds for feasible alternatives. Regarding problems under consideration, being not the minimization problem, the basis model in optimization, are other optimization-related models of high importance for applications: from Ky Fan inequalities (known also as equilibrium problems), quasi-variational inequalities, which are general models encompassing the minimization problem as a special case, to practical problems such as noncooperative games (known also as Nash equilibrium problems), traffic networks, and pure exchange economies. The thesis contains five chapters.

Chapter 1 recalls definitions and preliminaries for the use in the sequel.

Chapter 2 aims at studying approximations of set-valued quasi-variational inequalities and provides applications in generalized Nash equilibrium problems, pure exchange economies and traffic networks. This chapter gives definitions of finite valued bifunctions defined on nonrectangular domains of the above problems, proves approximations in terms of lopsided convergence of these bivariate functions of the approximating problems to that of the true problem and establishes Painlevé-Kuratowski convergence of the corresponding solution sets.

Chapter 3 considers parametric multiobjective generalized games defined on

topological vector spaces. Sufficient conditions for the lower semicontinuity of the set of approximate weak Pareto-Nash equilibrium points as well as for the Levitin-Polyak well-posedness are proved under compactness assumptions. For the case where a game is defined on metric spaces, full characterizations of the Levitin-Polyak well-posedness are established in terms of measures of noncompactness.

Chapter 4 has two parts. First, we establish sufficient conditions for uniqueness and error bounds of feasible flows of traffic networks by using the gap function for the corresponding set-valued quasi-variational inequality problem. Next, we give kinds of approximate solutions of a traffic network problem and obtain relations to approximate solutions of the corresponding set-valued quasi-variational inequality and establish sufficient conditions for the Tikhonov well-posedness in the sense of Levitin–Polyak of our traffic network problem.

Chapter 5 establishes scalar characterizations of approximate weak solution sets of set-valued Ky Fan inequalities under generalized convexity conditions, gives density results for approximate solution sets and provides sufficient conditions for the connectedness of approximate solution sets and approximate weak solution sets of these problems without assumptions of monotonicity and compactness.

MỞ ĐẦU

Tối ưu hóa (*optimization*) là một trong những lĩnh vực kinh điển của toán học có ảnh hưởng đến hầu hết các lĩnh vực khoa học - công nghệ và kinh tế - xã hội. Trong thực tế, việc tìm giải pháp tối ưu cho một vấn đề nào đó chiếm một vai trò hết sức quan trọng. Phương án tối ưu là phương án hợp lý nhất, tốt nhất, tiết kiệm chi phí, tài nguyên, nguồn lực mà lại cho hiệu quả cao. Bài toán tối ưu (*optimization problem*) cơ bản trong lý thuyết tối ưu (*optimization theory*) là bài toán tìm cực tiểu của một hàm số $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dưới một số ràng buộc. Bài toán tối ưu có mối quan hệ mật thiết với một số bài toán liên quan đến tối ưu (*optimization-related problems*): từ bất đẳng thức Ky Fan (*Ky Fan inequality*) (còn được biết với tên gọi thông dụng hơn là bài toán cân bằng (*equilibrium problem*)), bất đẳng thức biến phân (*variational inequality*), bài toán điểm yên ngựa (*saddle point problem*), bài toán bù (*complementarity problem*),... đến các bài toán rất thực tiễn là trò chơi không hợp tác (*noncooperative game*) (cũng gọi là bài toán cân bằng Nash (*Nash equilibrium problem*)), bài toán mạng giao thông (*traffic network problem*) và nền kinh tế thuần túy trao đổi (*pure exchange economy*). Trong trường hợp $f : X \to Y$, ở đó X, Y là các không gian véctơ tôpô, bài toán tối ưu trở thành tối ưu véctơ (*vector optimization*). Khái niệm cực tiểu được xác định theo một thứ tự bộ phận trong không gian Y. Thứ tự này thường được định nghĩa thông qua một nón lồi $C \subseteq Y$ sao cho $y_1 \leq_C y_2 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \in C$. Tối ưu véctơ ra đời vào cuối thế kỷ 19, với khái niệm nghiệm được đề xuất bởi F. Y. Edgeworth năm 1881 và V. Pareto vào năm 1896. Mô hình bài toán tối ưu véctơ cho phép nghiên cứu một số vấn đề về phúc lợi xã hội (*social welfare*) và cân bằng kinh tế (*economic equilibrium*). Ngoài ra, mô hình này cũng hữu ích trong việc giải quyết những bài toán ra quyết định chứa đựng nhiều lợi ích không tương thích hoặc đối kháng thường gặp trong các vấn đề liên quan đến thiết kế kĩ thuật, môi trường, tài chính,... Tối ưu véctơ xuất hiện như một chuyên ngành toán học độc lập sau bài báo của H. W. Kuhn và A. W. Tucker vào năm 1951 về các điều kiện cần và đủ cho một véctơ thỏa các ràng buộc là nghiệm hữu hiệu. Khái niệm ánh xạ đa trị xuất hiện từ những năm 30 của thế kỷ 20 trên cơ sở những bài toán có trong thực tế. Các bài toán tối ưu đa trị (*set-valued optimization*) chỉ mới xuất hiện từ đầu thập niên 80 của thế kỷ 20, mở đầu bởi các công trình của J. M. Borwein năm 1981, V. Postolică năm 1986 và H. W. Corley năm 1987 nhưng đã nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học và xuất hiện ngày càng nhiều trên các tạp chí chuyên ngành. Các bài toán khác trong lý thuyết tối ưu cũng dần dần được mở rộng cho ánh xạ đa trị và hình thành nên một ngành toán học khá hoàn chỉnh đó là lý thuyết tối ưu đa trị. Đến nay, đã có rất nhiều cuốn sách chuyên khảo về lý thuyết tối ưu và ứng dụng, xem [4, 5, 52, 54, 67],... Dưới đây chúng ta điểm qua lịch sử phát triển của một số bài toán được nghiên cứu trong luận án.

Bất đẳng thức Nikaido-Isoda được hai tác giả H. Nikaido và K. Isoda đề xuất vào năm 1955 nhằm tổng quát hóa bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác. Vào năm 1972, nó được xét đến dưới dạng một bất đẳng thức minimax bởi tác giả Ky Fan, người đã có nhiều đóng góp quan trọng cho bài toán nên bài toán được gọi là bất đẳng thức Ky Fan, là cơ sở cho các nghiên cứu về vấn đề tồn tại của nhiều lĩnh vực trong toán học. Kết quả này được chứng minh là tương đương với các định lý quan trọng trong giải tích phi tuyến như: định lý điểm bất động Brouwer, các định lý điểm bất động khác, nguyên lý biến phân Ekeland và các định lý về điểm cân bằng, có thể tham khảo chi tiết trong [5, 7, 15]. Vào năm 1992, L.D. Muu, W. Oettli đã gọi bài toán trên là bài toán cân bằng và nghiên cứu nó từ góc độ tối ưu hóa, xem nó như là mở rộng của bài toán cực tiểu và bất đẳng thức biến phân. Ngay sau đó, người ta phát hiện rằng mặc dù khá đơn giản về mặt hình thức nhưng nó bao hàm được nhiều lớp bài toán quan trọng thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, bài toán điểm bất động Kakutani và điểm yên ngựa, bài toán cân bằng Nash,... nó hợp nhất các bài toán này theo một phương pháp nghiên cứu chung rất tiện lợi. Do vậy, bất đẳng thức Ky Fan và các dạng tổng quát của nó với hàm véctơ và ánh xạ đa trị được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu, xem [1, 2, 3, 8, 15, 20, 21, 22, 25, 26, 30, 42, 51, 58, 63, 66, 72].

Tựa bất đẳng thức biến phân (*quasi-variational inequality*) được đề xuất bởi hai tác giả A. Bensoussan và J. L. Lions vào năm 1973 khi nghiên cứu bài toán điều khiển xung lực. Nó cung cấp cho chúng ta một công cụ toán học hữu ích để nghiên cứu các vấn đề phát sinh trong kinh tế, tối ưu hóa, điều khiển tối ưu, toán tài chính và các kĩnh vực khác khi tập ràng buộc phụ thuộc vào biến quyết định tối ưu, không giống như tập ràng buộc hằng của bất đẳng thức biến phân. Do đó, mô hình bài toán này được sử dụng để nghiên cứu các bài toán rất thực tiễn: mạng giao thông [1, 2, 13, 35, 36, 38, 53], cân bằng Nash mở rộng [6, 19, 27, 33, 39, 47, 50, 55, 56, 64, 70] và nền kinh tế thuần túy trao đổi [14, 27, 31].

Lý thuyết trò chơi được coi như một ngành của toán học từ năm 1928 với các công trình của J. V. Neumann và được nghiên cứu một cách hệ thống bởi J. V. Neumann và O. Morgenstern vào năm 1944. Các tác giả đã chỉ ra phương pháp tìm lời giải tối ưu cho trò chơi có tổng bằng không với hai người chơi. Đến năm 1950, J. F. J. Nash đưa ra khái niệm điểm cân bằng Nash cho phép phân tích trò chơi không hợp tác. Khái niệm này được sử dụng trong rất nhiều lĩnh vực như: kinh tế, tài chính, quân sự,... Trò chơi với hàm giá vectơ lần đầu tiên được nghiên cứu bởi D. Blackwell vào năm 1956. Năm 1959, L. S. Shapley đã giới thiệu khái niệm điểm cân bằng cho trò chơi đa mục tiêu. Trò chơi mở rộng được đề xuất bởi G. Debreu vào năm 1952 khi người chơi không được tự do chọn chiến thuật của mình vì tập chiến thuật của người chơi này phụ thuộc vào các chiến thuật của những người chơi còn lại. Hơn nữa, P. T. Harker và J. S. Pang, vào năm 1990, đã chỉ ra rằng, dòng cân bằng Nash của trò chơi không hợp tác mở rộng với hàm giá trơn là nghiệm của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân. Gần đây, mô hình trò chơi đa mục tiêu mở rộng được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu vì nó là mô hình tổng quát của trò chơi đa mục tiêu và bài toán cân bằng Nash mở rộng. Cân bằng Nash được mở rộng với hai khái niệm cân bằng Pareto-Nash yếu và cân bằng Pareto-Nash tương ứng với điểm hữu hiệu Pareto yếu và điểm hữu hiệu Pareto trong tối ưu véctơ, xem [39, 50, 64, 70].

Bài toán cân bằng giao thông lần đầu tiên được nghiên cứu bởi A. C. Piguo vào năm 1920 cho mô hình mạng gồm 2 nút và 2 cung. Năm 1952, J. G. Wardrop đã trình bày nguyên lý cân bằng Wardrop (*Wardrop principle*) nổi tiếng đảm bảo cho các dòng lưu thông trên mạng thỏa mãn các nhu cầu và tối ưu chi phí cho người sử dụng. Đến năm 1979, M. J. Smith đã chứng minh rằng các dòng cân bằng Wardrop của mạng giao thông là các nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân tương ứng với mạng. Từ đó mạng giao thông trở thành một lĩnh vực của lý thuyết tối ưu. Mạng giao thông với giá véctơ được nghiên cứu bởi G. Y. Chen và N. D. Yen vào năm 1993. Năm 2004 P. Q. Khanh và L. M. Luu phát triển kết quả của M. De Luca và A. Maugeri (năm 1995), đề xuất các định nghĩa cho dòng cân bằng Wardrop mạnh và yếu của mạng giao thông có hàm giá đa trị và thiết lập mối quan hệ giữa mạng giao thông và bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị. Sự tồn tại nghiệm và tính ổn định nghiệm của bài toán cân bằng giao thông được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu, xem [1, 2, 35, 36, 38, 62].

Các tính chất chính quy (*regularity*) của nghiệm bài toán tối ưu được hiểu là các tính chất cần có trong áp dụng của tập nghiệm như: tính khác rỗng (*nonemptiness*), tính duy nhất (*uniqueness*), tính lồi (*convexity*), tính liên thông (*connectedness*), tính đóng (*closedness*), tính compắc (*compactness*), cận sai số (*error bounds*), tính ổn định (*stability*),... Để nghiên cứu các tính chất chính quy của nghiệm bài toán tối ưu ta cần phải có các giả thiết chính quy tương ứng trên dữ liệu bài toán, theo nghĩa càng nhẹ càng tốt, và thiết lập các điều kiện cần, điều kiện đủ hoặc điều kiện cần và đủ cho các giả thiết này.

Tính ổn định nghiệm là một trong các những vấn đề cơ bản của lý thuyết tối ưu và ứng dụng. Thông thường ổn định có thể được chia ra hai loại đó là ổn định định tính (*qualitative stability* hoặc đơn giản là *stability*) và ổn định định lượng (*quantitative stability* hoặc *sensitivity*). Ổn định định tính thường thể hiện ở các tính chất liên tục của ánh xạ nghiệm theo tham số của bài toán đã cho, như tính nửa liên tục trên, tính nửa liên tục dưới, tính giả Lipschitz, tính Lipschitz, và tính Hölder,... Ổn định định lượng trong tối ưu hóa thường hiểu là tính toán đạo hàm (theo nghĩa cổ điển hoặc theo nghĩa suy rộng), đối đạo hàm (đối đạo hàm Fréchet, đối đạo hàm Mordukhovich,...) của ánh xạ nghiệm hữu hiệu hoặc hàm giá trị tối ưu của các bài toán phụ thuộc tham số. Nghiên cứu các định lượng hằng số Lipschitz và Hölder cũng thường xếp vào ổn định định lượng. Các kết quả về ổn định có thể xem trong [1, 2, 6, 35, 36, 38, 39, 47, 55, 56, 64, 70]. Theo sự hiểu biết của chúng tôi, hiện nay vẫn chưa có kết quả trực tiếp nào cho tính nửa liên tục dưới cho ánh xạ nghiệm của trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số.

Gần đây, nhiều tác giả xét ổn định định tính theo nghĩa hội tụ biến phân và gọi tên (chưa thống nhất) là ổn định, xấp xỉ (*approximation*), hoặc ước lượng (*estimator*). Lĩnh vực này được mở đầu năm 1964, với khái niệm hội tụ epi của hàm số xác định trên cả không gian và lấy giá trị thực mở rộng. Từ những năm 80 hội tụ epi/hypo và lopside của song hàm (mà ta muốn cực tiểu theo một biến và cực đại theo biến kia) cũng với miền xác định là cả không gian và miền giá trị là đường thẳng thực mở rộng được quan tâm nghiên cứu. Nhiều ứng dụng trong tối ưu đã được công bố. Năm 2009, A. Jofré và R. J. B. Wets đã nhận xét là song hàm trên cả không gian như vậy không thuận tiện cho nghiên cứu và áp dụng, vì miền hữu hiệu (*domain*) của nó phức tạp và người ta không có lý thuyết đẹp như hàm một biến trên cả không gian và lấy giá trị thực mở rộng đã được phát triển bởi J. J. Moreau và R. T. Rockafellar. Do đó, A. Jofré và R. J. B. Wets đã đề xuất khái niệm hội tụ lopside cho song hàm có giá trị hữu hạn xác định trên miền chữ nhật. Các tính chất biến phân cơ bản của lớp song hàm này đã được nghiên cứu và áp dụng, xem [32, 33, 51]. Gần đây, P. Q. Khanh và các cộng sự đã phát triển kết quả tương ứng cho hội tụ epi/hypo. Hơn nữa, các tác giả đã nhận xét rằng hội tụ biến phân của các song hàm có giá trị hữu hạn trên miền chữ nhật không áp dụng được cho các mô hình tựa biến phân, tức là các bài toán có miền ràng buộc phụ thuộc biến quyết định tối ưu, xem [12, 40]. Do đó việc mở rộng khái niệm hội tụ lopside và hội tụ epi/hypo, và thiết lập các tính chất biến phân cho lớp song hàm có giá trị hữu hạn trên miền không chữ nhật là cần thiết.

Một hướng nghiên cứu khác rất gần với tính ổn định nghiệm là tính đặt chỉnh (*well-posedness*). Tính đặt chỉnh có thể tiếp cận theo hai hướng: tính đặt chỉnh Hadamard, được đề xuất bởi J. Hadamard vào năm 1902, về tồn tại, duy nhất và phụ thuộc liên tục của nghiệm tối ưu và giá trị tối ưu vào sự thay đổi của dữ liệu bài toán; tính đặt chỉnh Tikhonov, được nghiên cứu bởi A. N. Tikhonov vào năm 1966, về tồn tại, duy nhất của nghiệm và hội tụ của mỗi dãy xấp xỉ đến nghiệm. Kiểu đặt chỉnh thứ hai đã được phát triển rất mạnh do tính ứng dụng của nó trong phương pháp số. Trong cùng năm này, E. S. Levitin và B. T. Polyak mở rộng tính đặt chỉnh Tikhonov cho bài toán tối ưu có ràng buộc khi xét dãy xấp xỉ nằm ngoài tập ràng buộc của bài toán tối ưu nhưng khoảng cách từ dãy xấp xỉ này đến tập ràng buộc dần về 0. Các kết quả gần đây cho tính đặt chỉnh cho nhiều bài toán liên quan đến tối ưu đã được nghiên cứu rộng rãi, có thể tham khảo trong [3, 28, 29, 46, 47, 55, 64]. Tuy nhiên, theo sự hiểu biết của chúng tôi, chưa có kết quả nào về tính đặt chỉnh cho bài toán cân bằng giao thông có tham số và tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số.

Từ sự phong phú của nhiều thuật toán tốt cho bài toán tối ưu, việc biến đổi các bài toán liên quan đến tối ưu về bài toán tối ưu có ràng buộc, thông qua việc xây dựng hàm đánh giá (*merit function* hoặc *gap function*) thích hợp, được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu, xem [6, 18, 30, 41] và các tài liệu trích dẫn trong đó. Hơn nữa, trong giải thuật tìm nghiệm, cận sai số là rất quan trọng vì nó đảm bảo thuật toán sẽ dừng sau hữu hạn bước thực hiện. Sự phát triển và các áp dụng trong tối ưu gần đây của cận sai số có thể tham khảo trong [59, 60]. Do đó, việc thiết lập điều kiện đủ cho tính duy nhất nghiệm và cận sai số cho các dòng chấp nhận được của mạng giao thông với nhu cầu mềm dẻo và giá đa trị là hướng nghiên cứu có ý nghĩa.

Trong số các tính chất tôpô của tập nghiệm, tính chất liên thông được chú trọng nghiên cứu bởi vì nó cung cấp khả năng di chuyển liên tục từ một nghiệm đến các nghiệm còn lại. Hơn nữa, tính liên thông có mối liên hệ chặt chẽ với tính chất điểm bất động, đây là đặc điểm rất hữu ích cho các bài toán trong lý thuyết cân bằng kinh tế, xem [21, 22, 25, 26, 63, 68]. Rất gần đây, Z. Y. Peng và X. M. Yang, năm 2015, và Y. Han và N. J. Huang, năm 2016, đã sử dụng tính chất nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan vô hướng tương ứng với bất đẳng thức Ky Fan véctơ hoặc đa trị trên không gian đối ngẫu để thiết lập tính chất liên thông cho tập nghiệm hoặc tập nghiệm xấp xỉ của các bài toán này đồng thời giảm nhẹ các điều kiện về tính chất đơn điệu và tính chất compắc. Trong các kết quả trên, các tác giả thường sử dụng các giả thiết lồi suy rộng hoặc giống lồi suy rộng. Tuy nhiên những giả thiết này có thể giảm nhẹ thành giả thiết dưới giống lồi suy rộng.

Mục đích của luận án là nghiên cứu một số tính chất chính quy của nghiệm các bài toán trong tối ưu hóa gồm: tính xấp xỉ, tính ổn định nghiệm, tính đặt chỉnh, tính duy nhất nghiệm, tính liên thông, tính lồi, tính đóng, tính compắc của tập nghiệm và cận sai số của biến chấp nhận được. Các bài toán được nghiên cứu trong luận án gồm: bất đẳng thức Ky Fan đa trị, tựa bất đẳng thức biến phân trị, trò chơi đa mục tiêu mở rộng, bài toán cân bằng Nash mở rộng, bài toán mạng giao thông và nền kinh tế thuần túy trao đổi. Luận án gồm phần mở đầu, năm chương nội dung, phần kết luận, hướng nghiên cứu tiếp theo và tài liệu tham khảo.

Chương 1 trình bày một số định nghĩa và kiến thức chuẩn bị phục vụ cho các chương sau.

Chương 2 nghiên cứu về tính xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và áp dụng cho các bài toán thực tiễn: bài toán cân bằng Nash mở rộng, nền kinh tế thuần túy trao đổi và bài toán mạng giao thông. Chương này đưa ra định nghĩa về các song hàm có giá trị hữu hạn trên miền không chữ nhật cho các bài toán trên, chứng minh xấp xỉ theo nghĩa hội tụ lopside của các song hàm tương ứng các bài toán xấp xỉ đến song hàm của bài toán gốc và thiết lập hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski cho các tập nghiệm tương ứng.

Chương 3 nghiên cứu trò chơi đa mục tiêu mở rộng trong không gian véctơ tôpô. Điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của tập các điểm cân bằng Pareto-Nash yếu xấp xỉ và điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh Levitin-Polyak được chứng minh dưới giả thiết compắc. Trong trường hợp trò chơi được xét trong không gian mêtric, tính đặt chỉnh Levitin-Polyak được thiết lập dựa vào các độ đo không compắc.

Chương 4 gồm hai mảng kết quả. Đầu tiên chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ về tính duy nhất nghiệm và các cận sai số cho các dòng chấp nhận được của mạng giao thông bằng cách sử dụng hàm đánh giá cho tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng. Tiếp theo chúng tôi đưa ra các định nghĩa về dòng cân bằng Wardrop xấp xỉ của mạng giao thông và trình bày mối quan hệ của dòng cân bằng xấp xỉ với nghiệm xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng và thiết lập điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh Tikhonov theo nghĩa Levitin–Polyak của mạng giao thông có tham số.

Chương 5 nghiên cứu vô hướng hóa cho các tập nghiệm yếu xấp xỉ của các bất đẳng thức Ky Fan đa trị dưới các giả thiết lồi suy rộng, trình bày tính trù mật của các tập nghiệm xấp xỉ và thiết lập điều kiện đủ cho tính liên thông của các tập nghiệm xấp xỉ và các tập nghiệm yếu xấp xỉ của các bài toán này mà không sử dụng các giả thiết về tính đơn điệu và tính compắc.

Chương 1

KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Chương này nhắc lại một số khái niệm và các kết quả cần thiết nhất về giải tích biến phân, giải tích đa trị và giải tích lồi. Nội dung của chương chủ yếu được trích dẫn từ các tài liệu [5, 7, 52, 67].

1.1 Sự hội tụ của dãy tập và dãy ánh xạ đa trị

Cho $\mathbb{B}^m$ và $\mathbb{B}^n$ là các không gian Banach hữu hạn chiều. Ký hiệu $\mathbb{N}$ và $\mathbb{R}$ lần lượt là tập các số tự nhiên và tập các số thực.

Định nghĩa 1.1.1. *Cho C và C^ν, với $\nu \in \mathbb{N}$, là các tập con của $\mathbb{B}^m$.*

(i) *Giới hạn trên (upper limit) của dãy tập C^ν được cho bởi công thức*

$$\mathrm{Limsup}_{\nu\to\infty} C^\nu := \{x \mid \exists x^{\nu_j} \in C^{\nu_j}, x^{\nu_j} \to x\};$$

(ii) *Giới hạn dưới (lower limit) của dãy tập C^ν được cho bởi công thức*

$$\mathrm{Liminf}_{\nu\to\infty} C^\nu := \{x \mid \exists x^{\nu} \in C^{\nu}, x^{\nu} \to x\};$$

(iii) *Nếu giới hạn trên và giới hạn dưới của C^ν bằng nhau thì C^ν được gọi là có giới hạn và*

$$\mathrm{Lim}_{\nu\to\infty} C^\nu := \mathrm{Limsup}_{\nu\to\infty} C^\nu = \mathrm{Liminf}_{\nu\to\infty} C^\nu.$$

Để thuận tiện khi trình bày, chúng ta sẽ dùng ký hiệu Lim_ν thay cho $\mathrm{Lim}_{\nu\to\infty}$ (tương tự cho Limsup, Liminf, $\liminf, \limsup$ và $\lim$).

Từ định nghĩa ta luôn có $\mathrm{Liminf}_\nu C^\nu \subseteq \mathrm{Limsup}_\nu C^\nu$. Khi $\mathrm{Lim}_\nu C^\nu$ tồn tại và bằng C, ta nói rằng C^ν hội tụ Painlevé-Kuratowski đến C, ký hiệu là $C = \mathrm{Lim}_\nu C^\nu$ hoặc $C^\nu \xrightarrow{P-K} C$.

Giới hạn trên và giới hạn dưới của C^ν luôn tồn tại, có thể bằng tập rỗng. Các giới hạn trên, giới hạn dưới và giới hạn của C^ν, nếu có, luôn là các tập đóng. Nếu C^ν là dãy tập đơn điệu, nghĩa là $C^\nu \subseteq C^{\nu+1}$ hoặc $C^\nu \supseteq C^{\nu+1}$ với mọi $\nu \in \mathbb{N}$, và C^ν không tiến ra chân trời thì luôn tồn tại giới hạn, ở đó C^ν tiến ra chân trời nếu với mỗi tập compắc $W \subseteq \mathbb{B}^m$ tồn tại $\bar{\nu}$ sao cho $C^\nu \cap W = \emptyset$ với mọi $\nu > \bar{\nu}$.

Sau đây chúng ta xét một ví dụ đơn giản về hội tụ dãy tập.

Ví dụ 1.1.2. Cho $C^\nu := \bar{B}(0, r^\nu)$ với $\bar{B}(\theta, \iota)$ là hình cầu đóng tâm θ bán kính ι. Khi đó, giới hạn dưới của C^ν là $\bar{B}(0, r)$ với $r = \liminf_\nu r^\nu$ và giới hạn trên của C^ν là $\bar{B}(0, r)$ với $r = \limsup_\nu r^\nu$. Trong trường hợp $r = \lim_\nu r^\nu$, giới hạn của C^ν là $\bar{B}(0, r)$.

Cho X, Y là hai tập hợp bất kỳ. Ánh xạ G đi từ X vào tập hợp gồm tất cả các tập con của Y, ký hiệu là $G : X \rightrightarrows Y$, được gọi là ánh xạ (toán tử) đa trị (*multivalued* hoặc *set-valued map*). Nếu tập $G(x)$ chỉ gồm đúng một phần tử của Y với mỗi $x \in X$ thì ta nói G là ánh xạ đơn trị (*single-valued map*) từ X vào Y và sử dụng ký hiệu thông thường $G : X \to Y$.

Định nghĩa 1.1.3. *Cho ánh xạ đa trị $G : X \rightrightarrows Y$.*

(a) *Đồ thị (graph) và miền hữu hiệu (domain) của G lần lượt được xác định bằng các công thức*

$$\mathrm{gph}G := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in G(x)\} \text{ và } \mathrm{dom}G := \{x \in X \mid G(x) \neq \emptyset\}.$$

(b) *Ánh xạ ngược $G^{-1} : Y \rightrightarrows X$ của G được xác định bởi công thức*

$$x \in G^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in G(x) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{gph}G.$$

Định nghĩa 1.1.4. *Cho $C \subseteq \mathbb{B}^m$, $\bar{x} \in C$, $G^\nu : C \rightrightarrows \mathbb{B}^m$, với $\nu \in \mathbb{N}$, và $G : C \rightrightarrows \mathbb{B}^m$. Các ánh xạ đa trị G^ν được gọi là hội tụ liên tục đến G tại $\bar{x}$, ký hiệu là $G^\nu \overset{c}{\to} G$ tại $\bar{x}$, nếu*

$$G^\nu(x^\nu) \xrightarrow{P-K} G(\bar{x}) \tag{1.1}$$

với mọi dãy $x^\nu \in C \to \bar{x}$.

Nếu (1.1) thỏa với mọi $\bar{x} \in C$ thì G^ν được gọi là hội tụ liên tục đến G tương đối trên C (hoặc trên C). Quy ước này sẽ được áp dụng cho các tính chất khác trong luận án.

Nếu $C^\nu \xrightarrow{P-K} C$ và (1.1) thỏa với mọi $\bar{x} \in C$ và $x^\nu \in C^\nu$ sao cho $x^\nu \to \bar{x}$ thì $G^\nu : C^\nu \rightrightarrows \mathbb{B}^m$ được gọi là hội tụ liên tục đến $G : C \rightrightarrows \mathbb{B}^m$ ứng với $C^\nu \xrightarrow{P-K} C$.

Định nghĩa 1.1.5. *Cho $G^\nu : \mathbb{B}^m \rightrightarrows \mathbb{B}^m$, với $\nu \in \mathbb{N}$, và $G : \mathbb{B}^m \rightrightarrows \mathbb{B}^m$. Các ánh xạ đa trị G^ν được gọi là hội tụ graph (converge graphically) đến ánh xạ G, ký hiệu là $G^\nu \overset{g}{\to} G$, nếu*

$$\text{gph}\, G^\nu \xrightarrow{P-K} \text{gph}\, G.$$

Nhận xét 1.1.6. Hội tụ liên tục của các ánh xạ đa trị trên $C \subseteq \mathbb{B}^m$ hoặc ứng với hội tụ miền hữu hiệu kéo theo hội tụ graph của chúng (xem [67], Định lý 5.44).

Ví dụ sau đây minh họa về hội tụ graph của các ánh xạ đa trị.

Ví dụ 1.1.7. Cho $G^\nu : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi công thức $G^\nu(x) = \sin(\frac{1}{\nu x})$ với $\nu \in \mathbb{N}$ và $H^\nu : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định công thức $H^\nu(x) = \sin(\nu x)$ với $\nu \in \mathbb{N}$. Khi đó, G^ν hội tụ graph đến

$$G(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{nếu } x = 0, \\ \{0\} & \text{nếu } x \neq 0, \end{cases}$$

và H^ν hội tụ graph đến $H(x) = [-1, 1]$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1.8. *Cho $C^\nu \subseteq \mathbb{B}^m$ và $G^\nu : \mathbb{B}^m \rightrightarrows \mathbb{B}^m$, với $\nu \in \mathbb{N}$. C^ν được gọi là bị chặn phần cuối (eventually bounded) nếu tồn tại ν_0 sao cho $\bigcup_{\nu \geq \nu_0} C^\nu$ bị chặn. G^ν có tính chất đồ thị bị chặn phần cuối (eventually graphically bounded) nếu* gphG^ν *bị chặn phần cuối.*

1.2 Hội tụ biến phân của dãy hàm và dãy song hàm có giá trị hữu hạn

Trong phần đầu của mục này, chúng ta nhắc lại các khái niệm và tính chất của hội tụ hypo cho lớp hàm có giá trị hữu hạn trên $\mathbb{B}^n$.

Cho hàm $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Khi đó, trên đồ thị (*epigraph*) và dưới đồ thị (*hypograph*) của f lần lượt được cho bởi các công thức

$$\mathrm{epi}f := \{(x, r) \in \mathbb{B}^n \times \mathbb{R} |\ f(x) \le r\} \text{ và } \mathrm{hypo}f := \{(x, r) \in \mathbb{B}^n \times \mathbb{R} |\ f(x) \ge r\}.$$

Định nghĩa 1.2.1. *Cho các tập $C, C^\nu \subseteq \mathbb{B}^n$ thỏa điều kiện $C^\nu \xrightarrow{P-K} C$ và các hàm $f : C \to \mathbb{R}$, $f^\nu : C^\nu \to \mathbb{R}$. Khi đó, dãy hàm f^ν được gọi là hội tụ hypo (hypo-converge) đến hàm f, ký hiệu là $f^\nu \xrightarrow{h} f$ hoặc $f = \text{h-lim}_\nu f^\nu$, nếu hai điều kiện sau thỏa mãn*

(a) $\forall x^\nu \in C^\nu$ *mà* $x^\nu \to x$, $\mathrm{limsup}_\nu f^\nu(x^\nu) \le f(x)$;

(b) $\forall x \in C$, $\exists x^\nu \in C^\nu$ *sao cho* $x^\nu \to x$ *và* $\mathrm{liminf}_\nu f^\nu(x^\nu) \ge f(x)$.

f^ν được gọi là hội tụ hypo chặt (tight) đến f nếu f^ν hội tụ hypo đến f và, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một tập compắc C_ϵ và một chỉ số ν_ϵ sao cho, với mọi $\nu \ge \nu_\epsilon$,

$$\sup_{C^\nu \cap C_\epsilon} f^\nu \ge \sup_{C^\nu} f^\nu - \epsilon.$$

f^ν được gọi là hội tụ epi (epi-converge) đến hàm f nếu $-f^\nu$ hội tụ hypo đến $-f$. Lưu ý rằng, hội tụ epi thích hợp để xét bài toán tìm cực tiểu.

Định lý 1.2.2. (*xem [67], Định lý 7.31*)

(a) *f^ν hội tụ hypo đến f nếu và chỉ nếu* $\mathrm{hypo}f^\nu \xrightarrow{P-K} \mathrm{hypo}f$.

(b) *Nếu f^ν hội tụ hypo đến f, thì* $\liminf_\nu(\sup_{C^\nu} f^\nu) \ge \sup_C f$ *và mỗi điểm tụ của dãy các điểm cực đại (maximizer) của f^ν là điểm cực đại của f.*

(c) *Nếu f^ν hội tụ hypo chặt đến f thì* $\sup_{C^\nu} f^\nu \to \sup_C f$ *và với mỗi* $\bar{x} \in \mathrm{argmax}_C f$ *ta tìm được* $\bar{x}^\nu \in \mathrm{argmax}_{C^\nu} f^\nu$ *sao cho* $\bar{x}^\nu \to \bar{x}$.

Tiếp theo, chúng ta xét một song hàm (*bifunction*) ψ có giá trị hữu hạn đi từ $C \times D \subseteq \mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$ vào $\mathbb{R}$ đồng thời tìm cực đại của ψ theo biến $x \in C$ và tìm cực tiểu của ψ theo biến $y \in D$. Có rất nhiều song hàm trong tối ưu hóa có dạng trên, chẳng hạn như là hàm Lagrange trong quy hoạch tuyến tính, hàm mục tiêu của trò chơi tổng 0 và hàm Hamilton trong điều khiển tối ưu. Hơn nữa, A. Jofré và R. J. B. Wets [33] đã chứng minh rằng nhiều bài toán liên quan đến tối ưu có thể biến đổi về bài toán tìm các điểm maxinf của một song hàm có giá trị hữu hạn. Chúng ta ký hiệu lớp song hàm này là fv-biv($\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$) được cho bởi công thức

$$\text{fv-biv}(\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n) := \{\psi : C \times D \to \mathbb{R} \mid \emptyset \neq C \subseteq \mathbb{B}^m, \emptyset \neq D \subseteq \mathbb{B}^n\}.$$

Hội tụ biến phân của các song hàm có giá trị hữu hạn xác định trên miền chữ nhật fv-biv($\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$) được phát biểu như sau, xem Định nghĩa 3 trong [32].

Định nghĩa 1.2.3. *Dãy song hàm $\psi^\nu : C^\nu \times D^\nu \to \mathbb{R}$ thuộc* fv-biv($\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$) *được gọi là hội tụ lopside (lopsided convergence) đến song hàm $\psi : C \times D \to \mathbb{R}$ cũng thuộc* fv-biv($\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$) *nếu $C^\nu \times D^\nu \xrightarrow{P-K} C \times D$ và*

(a) *với mọi $x^\nu \in C^\nu$ mà $x^\nu \to x$ và $y \in D$, tồn tại $y^\nu \in D^\nu$ sao cho $y^\nu \to y$ và*

$$\text{limsup}_\nu \psi^\nu(x^\nu, y^\nu) \leq \psi(x, y);$$

(b) *với mọi $x \in C$, tồn tại $x^\nu \in C^\nu$ sao cho $x^\nu \to x$ và với mọi $y^\nu \in D^\nu$ mà $y^\nu \to y$,*

$$\text{liminf}_\nu \psi^\nu(x^\nu, y^\nu) \geq \psi(x, y).$$

Hội tụ lopside được gọi là chặt một phần (ancillary tight) nếu (b) *được làm mạnh lên thành*

(b-t) (b) *thỏa và với mỗi $\epsilon > 0$, ta có thể tìm một tập compắc D_ϵ, phụ thuộc vào dãy $x^\nu \to x$, sao cho, với mọi ν đủ lớn,*

$$\inf_{y \in D^\nu \cap D_\epsilon} \psi^\nu(x^\nu, y) \leq \inf_{y \in D^\nu} \psi^\nu(x^\nu, y) + \epsilon.$$

Sau cùng, hội tụ lopside được gọi là chặt hoàn toàn (*tight*) *nếu nó chặt một phần và* (a) *được làm mạnh lên thành*

(a-t) (a) *thỏa và, với mọi* $\epsilon > 0$, *tồn tại một tập compắc* C_ϵ *sao cho, với* ν *đủ lớn,*

$$\sup_{x \in C^\nu \cap C_\epsilon} \inf_{y \in D^\nu} \psi^\nu(x,y) \geq \sup_{x \in C^\nu} \inf_{y \in D^\nu} \psi^\nu(x,y) - \epsilon.$$

Định nghĩa về hội tụ lopside mở rộng định nghĩa về hội tụ liên tục theo nghĩa thông thường, cụ thể là $f^\nu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được gọi là hội tụ liên tục đến $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ứng với $C^\nu \xrightarrow{P-K} C$ nếu, với mọi $x^\nu \to x \in C$ sao cho $x^\nu \in C^\nu$ với mọi $\nu \in \mathbb{N}$, ta có $f^\nu(x^\nu) \to f(x)$.

Một ví dụ đơn giản cho hội tụ liên tục của dãy song hàm là xét $\psi^\nu(x,y) = y^2 - x^2$ trên $[-1-1/\nu, 1+1/\nu] \times [-1-1/\nu, 1+1/\nu]$, các song hàm này hội tụ liên tục đến $\psi(x,y) = y^2 - x^2$ trên $[-1,1] \times [-1,1]$ ứng với $[-1-1/\nu, 1+1/\nu] \times [-1-1/\nu, 1+1/\nu]$ hội tụ về tập $[-1,1] \times [-1,1]$. Rõ ràng, ψ^ν cũng hội tụ lopside đến ψ.

Tính chất biến phân của hội tụ lopside được trình bày trong định lý sau.

Định lý 1.2.4. (*xem* [*32*], *Định lý 5*)

(a) *Nếu* ψ^ν *hội tụ lopside chặt một phần đến* ψ *và* $\inf_D \psi(x,\cdot)$ *là hữu hạn với mỗi* $x \in C$, *thì mỗi điểm tụ* $\bar{x}$ *của dãy các điểm maxinf ứng với* C^ν, D^ν *của* ψ^ν *là điểm maxinf ứng với* C, D *của* ψ.

(b) *Nếu hội tụ này là chặt hoàn toàn và* $\sup_{x \in C} \inf_{y \in D} \psi(x,y)$ *là hữu hạn thì*

$$\sup_{x \in C^\nu} \inf_{y \in D^\nu} \psi^\nu(x,y) \to \sup_{x \in C} \inf_{y \in D} \psi(x,y),$$

và nếu $\bar{x}$ *là một điểm maxinf của* ψ *thì ta có thể tìm được*

$$x^\nu \in \operatorname{argmax}(\inf_{y \in D^\nu} \psi^\nu(\cdot, y))$$

sao cho $x^\nu \to \bar{x}$. *Ngược lại, nếu dãy này tồn tại thì*

$$\sup_{x \in C^\nu} \inf_{y \in D^\nu} \psi^\nu(x,y) \to \inf_{y \in D} \psi(\bar{x}, y).$$

Chúng ta xét ví dụ sau đây, xem [33].

Ví dụ 1.2.5. Cho $C^\nu = C = \mathbb{R}$, $D^\nu = D = \mathbb{R}$ và

$$\psi^\nu(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } y \notin \{0,\nu\}, \\ 1 & \text{nếu } y = 0, \\ \nu & \text{nếu } y = \nu. \end{cases}$$

Rõ ràng, ψ^ν hội tụ lopside đến song hàm

$$\psi(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } y = 0, \\ 0 & \text{nếu } y \neq 0. \end{cases}$$

Ta có argmaxinf $\psi \neq \emptyset$, $\sup\inf\psi = 1$ là hữu hạn và đạt được tại mỗi điểm thuộc $\mathbb{R} \times \{0\}$. Tuy nhiên, $\sup\inf\psi^\nu \nearrow \infty \neq 1$ bởi vì không tồn tại một tập compắc và một tập chỉ số nào thỏa điều kiện chặt một phần. Hơn nữa, việc tồn tại điểm maxinf cho bài toán gốc không đảm bảo điều kiện chặt một phần vì các điểm maxinf khác có thể tiến ra vô cùng.

Lưu ý rằng, nếu D là tập compắc thì điều kiện chặt một phần của hội tụ lopside thỏa và nếu C và D là hai tập compắc thì điều kiện chặt hoàn toàn thỏa.

1.3 Tính liên tục của ánh xạ đa trị

Trong mục này, chúng ta nhắc lại một số khái niệm và tính liên tục của ánh xạ đa trị. Cho tập con A của không gian tôpô X, ta ký hiệu cl$A$, conv$A$ và int$A$ lần lượt là bao đóng, bao lồi và phần trong của A. Tập điểm bất động của ánh xạ đa trị $G : X \rightrightarrows X$ được ký hiệu là Fix(G).

Định nghĩa 1.3.1. *Cho X, Y là các không gian véctơ tôpô và $G : X \rightrightarrows Y$.*

(a) *Nếu* gph$G$ *là tập đóng (lồi, bị chặn tương ứng) trong $X \times Y$ thì G được gọi là ánh xạ đóng (lồi, bị chặn tương ứng);*

(b) *Nếu $G(x)$ là tập đóng (lồi, compắc, khác rỗng tương ứng) với mỗi $x \in X$ thì G được gọi là ánh xạ có giá trị đóng (lồi, compắc, khác rỗng tương ứng).*

Ta dễ dàng chứng minh được kết quả đơn giản dưới đây.

Mệnh đề 1.3.2. *Cho X, Y là các không gian véctơ tôpô và ánh xạ đa trị $G : X \rightrightarrows Y$. Khi đó,*

(a) *Nếu G là ánh xạ đóng thì G có giá trị đóng;*

(b) *Nếu G là ánh xạ lồi thì G có giá trị lồi.*

Các ví dụ dưới đây chỉ ra rằng ánh xạ đa trị có giá trị lồi chưa chắc là ánh xạ lồi và ánh xạ đa trị có giá trị đóng chưa chắc là ánh xạ đóng.

Ví dụ 1.3.3. Cho $G : \mathbb{N}^* \rightrightarrows \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$G(x) = \begin{cases} \operatorname{conv}\{1, 2, \ldots, x-1\} & \text{nếu } x \geq 2, \\ \{0\} & \text{nếu } x = 1, \end{cases}$$

trong đó $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ và $H : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi công thức

$$H(x) = \begin{cases} [0, 1] & \text{nếu } x = 0, \\ \mathbb{R} & \text{trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Hiển nhiên G là ánh xạ đa trị với giá trị lồi nhưng không là ánh xạ lồi và ánh xạ H có giá trị đóng nhưng không là ánh xạ đóng bởi vì $\operatorname{gph} H = (\{0\} \times [0, 1]) \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R})$ là tập không đóng trong $\mathbb{R}^2$.

Định nghĩa 1.3.4. *Cho X, Y là các không gian tôpô, $G : X \rightrightarrows Y$ và $\bar{x} \in \operatorname{dom} G$. Khi đó, G được gọi là*

(a) *nửa liên tục dưới (lower semicontinuous) tại $\bar{x}$ nếu với mọi tập mở $V \subseteq Y$ thỏa mãn $G(\bar{x}) \cap V \neq \emptyset$, tồn tại một lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho $G(x) \cap V \neq \emptyset, \forall x \in U$;*

(b) *nửa liên tục trên (upper semicontinuous) tại $\bar{x}$ nếu với mọi tập mở $V \subseteq Y$ thỏa mãn $G(\bar{x}) \subseteq V$, tồn tại một lân cận mở U của $\bar{x}$ sao cho $G(x) \subseteq V, \forall x \in U$;*

(c) *liên tục tại $\bar{x}$ nếu G nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại $\bar{x}$.*

Nếu G nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới, liên tục, tương ứng) tại mọi $\bar{x} \in \text{dom}G$ thì ta nói G nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới, liên tục, tương ứng). Đối với ánh xạ đơn trị thì hai khái niệm nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới là đồng nhất nhưng đối với ánh xạ đa trị thì không

Ví dụ 1.3.5. Xét $G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức

$$G(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{nếu } x \neq 0, \\ \{0\} & \text{nếu } x = 0, \end{cases}$$

và $H : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ được xác định bởi công thức

$$H(x) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{nếu } x = 0, \\ \{0\} & \text{nếu } x \neq 0. \end{cases}$$

Ta thấy rằng G nửa liên tục dưới tại 0 nhưng không nửa liên tục trên tại 0, trong khi đó H nửa liên tục trên tại 0 nhưng không nửa liên tục dưới tại 0.

Nhận xét 1.3.6. Nếu G nửa liên tục trên và có giá trị đóng thì G đóng. Chiều ngược lại nói chung không đúng.

Để minh họa kết quả trên, chúng ta xét các ví dụ sau.

Ví dụ 1.3.7. Xét $G : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ được cho bởi công thức

$$G(x) = \begin{cases} (0, \infty) & \text{nếu } x = 0, \\ \left(\dfrac{1}{|x|}, \infty\right) & \text{nếu } x \neq 0. \end{cases}$$

Rõ ràng, G nửa liên tục trên tại 0 nhưng không đóng tại 0. Thật vậy, ta lấy hai dãy $x^n = \frac{1}{2n} \to 0$ và $y^n = \frac{1}{n}$. Khi đó, $y^n \in G(x^n) = \left(\frac{1}{2n}, \infty\right)$ và $y^n \to 0$ nhưng $0 \notin (0, \infty) = G(0)$. Chứng tỏ G không đóng tại 0.

Ví dụ 1.3.8. Xét $G : \mathbb{R}_+ \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ được xác định bởi công thức

$$G(x) = \begin{cases} [0, x] \bigcup \left\{\dfrac{1}{x}\right\} & \text{nếu } x > 0, \\ \{0\} & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$

Rõ ràng, G đóng nhưng G không nửa liên tục trên tại $x = 0$.

Khái niệm tương đương của tính nửa liên tục dưới của ánh xạ đa trị thường được sử dụng trong luận án được phát biểu trong định nghĩa sau đây.

Định nghĩa 1.3.9. *Cho* X, Y *là các không gian tôpô và* $G : X \rightrightarrows Y$. G *được gọi là nửa liên tục dưới tại* $x \in \mathrm{dom}G$ *nếu, với mọi* $x^\alpha \to x$ *và* $y \in G(x)$, *tồn tại* $y^\alpha \in G(x^\alpha)$ *sao cho* $y^\alpha \to y$.

Định nghĩa 1.3.10. *Cho* X, Y *là các không gian định chuẩn và* $G : X \rightrightarrows Y$. G *được gọi là Lipschitz trên một tập con* $U \subseteq X$ *nếu, với mỗi số không âm* L *và mọi* $x, y \in U$,

$$\mathcal{H}(G(x), G(y)) \leq L\|x - y\|$$

trong đó $\mathcal{H}$ *là khoảng cách Hausdorff, nghĩa là* $\mathcal{H}(U, V) = \max\{e(U, V), e(V, U)\}$ *với* $e(U, V) = \sup_{u \in U} d(u, V)$ *và* $d(u, V) = \inf_{v \in V} d(u, v)$.

Sau đây, ta xét một đặc trưng quan trọng của ánh xạ đa trị có giá trị compắc. Kết quả này thường được sử dụng để nghiên cứu tính đặt chỉnh.

Định lý 1.3.11. (xem [*16*]) *Cho* X *và* Y *là các không gian tôpô và ánh xạ đa trị* $G : X \rightrightarrows Y$. *Nếu* $G(x)$ *là compắc thì* G *là nửa liên tục trên tại* x *khi và chỉ khi với mọi* $x^\alpha \in X$ *hội tụ đến* x *và mọi* $y^\alpha \in G(x^\alpha)$ *tồn tại một dãy con* y^{α_β} *hội tụ về một phần tử* y *nào đó của* $G(x)$. *Nếu thêm điều kiện* $G(x) = \{y\}$ *thì* $y^\alpha \to y$.

Cho X là không gian tôpô và $D \subseteq X$. Ta nói D là liên thông nếu không tồn tại hai tập mở khác rỗng V_1, V_2 sao cho $V_1 \cup V_2 = D$ và $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Ta nói D là liên thông đường nếu với mỗi cặp x và y thuộc D, tồn tại một ánh xạ liên tục $\varphi : [0, 1] \to D$ sao cho $\varphi(0) = x$ và $\varphi(1) = y$.

Kết quả sau đây chỉ ra tính liên thông của miền giá trị của ánh xạ đa trị nửa liên tục.

Định lý 1.3.12. (xem [*74*]) *Cho* X *và* Y *là các không gian tôpô và* $G : X \rightrightarrows Y$ *là nửa liên tục trên hoặc nửa liên tục dưới. Giả sử rằng* $D \subseteq X$ *là liên thông và* $G(x)$ *là liên thông và khác rỗng với mọi* $x \in D$, *khi đó* $G(D) := \bigcup_{x \in D} G(x)$ *là liên thông.*

1.4 Tính lồi suy rộng theo nón của ánh xạ đa trị

Trong phần đầu của mục này, ta nhắc lại một số khái niệm về tính lồi suy rộng của hàm.

Định nghĩa 1.4.1. *Cho $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$. Khi đó, f được gọi là*

(i) *tựa lồi (quasiconvex) nếu, với mỗi $x, y \in \mathbb{B}^n$ và $\lambda \in [0, 1]$, ta có*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \max\{f(x), f(y)\};$$

(ii) *tựa lồi nửa chặt (semistrictly quasiconvex) nếu nó là tựa lồi và với mỗi $x, y \in \mathbb{B}^n$ sao cho $f(x) \ne f(y)$ ta có*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}, \ \ \forall \lambda \in (0, 1).$$

Các hàm tựa lõm (quasiconcave) và tựa lõm nửa chặt (semistrictly quasiconcave) được định nghĩa tương tự.

Cho $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$, ký hiệu $L_f(x) := \{u \in \mathbb{B}^n | f(u) \le f(x)\}$ và $L_f^<(x) := \{u \in \mathbb{B}^n | f(u) < f(x)\}$ lần lượt là tập mức dưới (*sublevel set*) và tập mức dưới chặt (*strict sublevel set*) của f.

Định nghĩa 1.4.2. [6] *Cho $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ và $x \in \mathbb{B}^n$, tập mức dưới điều chỉnh (adjusted sublevel set) tại x, ký hiệu $L_f^a(x)$, được định nghĩa như sau*

$$L_f^a(x) := \begin{cases} L_f(x) \cap \ clB(L_f^<(x), \rho_x) & \text{nếu} \ \ x \notin \ argmin_{\mathbb{B}^n} f, \\ L_f(x) & \text{ngược lại,} \end{cases}$$

trong đó $\rho_x := \inf\{\|x - z\|, \forall z \in L_f^<(x)\}$.

Chúng ta biết rằng tập mức dưới điều chỉnh nằm giữa tập mức dưới chặt và tập mức dưới, hơn nữa bao đóng của tập mức dưới chặt trùng với hai tập còn lại nếu f là hàm tựa lồi nửa chặt.

Cho hàm tựa lồi $f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$, toán tử nón pháp tuyến (*normal cone operator*) tương ứng với f là ánh xạ đa trị đi từ $\mathbb{B}^n$ vào $(\mathbb{B}^n)^*$ được định nghĩa như sau: với $x \in \mathbb{B}^n$,

$$N_f^a(x) := \{v \in (\mathbb{B}^n)^* | \langle v, y - x\rangle \leq 0, \forall y \in L_f^a(x)\}.$$

Rõ ràng, nếu f là hàm tựa lồi nửa chặt thì $N_f^a(x)$ là nón cực của tập dưới mức $L_f(x)$ hoặc của tập mức dưới chặt $L_f^<(x)$.

Tiếp theo, ta nhắc lại các khái niệm về tính lồi suy rộng của các ánh xạ đa trị. Trong phần còn lại của mục này ta xét X, Y là các không gian định chuẩn, $D \subseteq X$ là tập lồi và $C \subseteq Y$ là nón lồi nhọn với phần trong $\text{int}C \neq \emptyset$.

Định nghĩa 1.4.3. *Cho $G : X \rightrightarrows Y$. Khi đó, G được gọi là*

(a) *C-lồi (C-convex) trên D nếu với mỗi $x_1, x_2 \in D$ và với mỗi $\lambda \in [0, 1]$,*

$$\lambda G(x_1) + (1 - \lambda)G(x_2) \subseteq G(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) + C;$$

(b) *C-lõm (C-concave) trên D nếu $-G$ là C-lồi trên D;*

(c) *C-giống lồi (C-convexlike) trên D nếu và chỉ nếu $G(D) + C$ là tập lồi;*

(d) *C-dưới giống lồi (C-subconvexlike) trên D nếu và chỉ nếu $G(D) + \text{int}C$ là tập lồi;*

Trong Định nghĩa 1.4.3(c) và 1.4.3(d), tập D có thể không lồi. Theo [45], tính chất C-lồi $\Rightarrow$ tính chất C-giống lồi $\Rightarrow$ tính chất C-dưới giống lồi. Tuy nhiên, chiều ngược lại của các quan hệ này nói chung là không đúng.

Ví dụ sau đây chỉ ra G là ánh xạ C-giống lồi nhưng không C-lồi, xem [17].

Ví dụ 1.4.4. Cho $G : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ xác định bởi công thức

$$G(x_1, \ldots, x_n) = \{(\cos(x_1 + \cdots + x_n), \sin(x_1 + \cdots + x_n))\},$$

với $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Khi đó, G là ánh xạ C-giống lồi nhưng không C-lồi trên $\mathbb{R}^n$ với nón $C := \mathbb{R}^2_+$.

Ví dụ sau đây minh họa G là ánh xạ C-dưới giống lồi nhưng không C-giống lồi, xem [45].

Ví dụ 1.4.5. Cho $X = \{(0,1),(1,0)\}, Y = \mathbb{R}^2$, $C = \mathbb{R}^2_+$, $G(x_1,x_2) = \{(x_1,x_2)\} \cup (C \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\})$. Khi đó, G là ánh xạ C-dưới giống lồi trên X. Tuy nhiên, G không C-giống lồi.

Chương 2

TÍNH XẤP XỈ CỦA BÀI TOÁN TỰA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN ĐA TRỊ VÀ CÁC ÁP DỤNG

Chương này thiết lập điều kiện đủ cho sự hội tụ nghiệm theo nghĩa Painlevé-Kuratowski của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và áp dụng cho các bài toán trong thực tiễn: bài toán cân bằng Nash mở rộng, nền kinh tế thuần túy trao đổi và bài toán cân bằng giao thông.

Mục 2.1 trình bày các định nghĩa về hội tụ lopside cho các song hàm trên miền không chữ nhật và các điểm maxinf tương ứng và thiết lập tính chất biến phân khi các song hàm hội tụ lopside. Mục 2.2 xây dựng song hàm tương ứng cho bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị, chứng minh sự tương đương của điểm maxinf của song hàm này với nghiệm của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và thiết lập điều kiện đủ cho sự hội tụ nghiệm của các bài toán xấp xỉ về nghiệm của bài toán gốc theo nghĩa Painlevé-Kuratowski. Mục 2.3 thiết lập điều kiện đủ cho sự hội tụ của các điểm cân bằng Nash mở rộng. Mục 2.4 trình bày điều kiện đủ cho sự hội tụ các điểm cân bằng cạnh tranh Walras và Mục 2.5 đưa ra điều kiện đủ cho sự hội tụ của các dòng cân bằng giao thông.

Chương 2 được viết trên cơ sở của bài báo [KS1]. Các kết quả chính được trình bày ở đây mở rộng một số kết quả tương ứng trong [33] về xấp xỉ cho các bài toán biến phân, trong [51] về xấp xỉ cho bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị và trong [69] về xấp xỉ cho mạng giao thông với hàm giá véctơ.

2.1 Hội tụ lopside của các song hàm có giá trị hữu hạn trên miền không chữ nhật

Xét các không gian Banach hữu hạn chiều $\mathbb{B}^m$ và $\mathbb{B}^n$. Cho C, C^ν là các tập con của $\mathbb{B}^m$, D, D^ν là các tập con của $\mathbb{B}^n$ và các ánh xạ đa trị $\mathcal{D}^\nu : C^\nu \rightrightarrows D^\nu$, $\mathcal{D} : C \rightrightarrows D$. Giả sử $C^\nu \xrightarrow{P-K} C$, $\mathcal{D}^\nu \overset{c}{\to} \mathcal{D}$ ứng với $C^\nu \xrightarrow{P-K} C$ tại mỗi $x \in C$. Xét các song hàm $\psi^\nu : C^\nu \times \mathcal{D}^\nu(C^\nu) \to \mathbb{R}$ và $\psi : C \times \mathcal{D}(C) \to \mathbb{R}$. Chúng ta vẫn ký hiệu lớp các song hàm này là fv-biv$(\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$.

Định nghĩa 2.1.1. *Các song hàm ψ^ν thuộc* fv-biv$(\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$ *được gọi là hội tụ lopside tới song hàm ψ thuộc* fv-biv$(\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$ *nếu*

(a) *với mọi $x^\nu \in C^\nu$ với $x^\nu \to x$ và $y \in \mathcal{D}(x)$, tồn tại $y^\nu \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu)$ sao cho $y^\nu \to y$ và*

$$\text{limsup}_\nu \psi^\nu(x^\nu, y^\nu) \le \psi(x, y);$$

(b) *với mọi $x \in C$, tồn tại $x^\nu \in C^\nu$ sao cho $x^\nu \to x$ và với mọi $y^\nu \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu)$ với $y^\nu \to y$,*

$$\text{liminf}_\nu \psi^\nu(x^\nu, y^\nu) \ge \psi(x, y).$$

Hội tụ lopside được gọi là chặt một phần nếu (b) *được thay bởi*

(b-t) (b) *thỏa và, với $\epsilon > 0$, ta có thể tìm một tập compắc D_ϵ chỉ phụ thuộc vào dãy $\{x^\nu\}_\nu$ sao cho, với ν đủ lớn,*

$$\inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu) \cap D_\epsilon} \psi^\nu(x^\nu, y) \le \inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu)} \psi^\nu(x^\nu, y) + \epsilon.$$

Cuối cùng, hội tụ lopside được gọi là chặt hoàn toàn nếu nó chặt một phần và (a) *được thay bởi*

(a-t) (a) *thỏa và, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một tập compắc C_ϵ sao cho, với ν đủ lớn,*

$$\sup_{x \in C^\nu \cap C_\epsilon} \inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x)} \psi^\nu(x, y) \ge \sup_{x \in C^\nu} \inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x)} \psi^\nu(x, y) - \epsilon.$$

Trên miền không chữ nhật $\{(x,y)|x \in C, y \in \mathcal{D}(x)\}$, $\bar{x}$ được gọi là điểm maxinf của ψ ứng với $C, \mathcal{D}(\cdot)$ nếu

$$\bar{x} \in \arg\max_{x \in C}[\inf_{y \in \mathcal{D}(x)} \psi(x,y)].$$

Lưu ý rằng, hội tụ lopside trong Định nghĩa 2.1.1 không đối xứng với hội tụ lopside theo nghĩa minsup, xem [32].

Ví dụ 2.1.2. Xét $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m = \mathbb{R}$, $C = C^\nu = D = D^\nu = [0,1], \mathcal{D}(x) = [0,x]$ với $x \in [0,1]$ và $\psi^\nu(x,y) = y^x$ với mọi $\nu \in \mathbb{N}$ (quy ước $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}$). Khi đó, ψ^ν hội tụ lopside đến song hàm

$$\psi(x,y) = \begin{cases} y^x & \text{nếu } 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq x, \\ 1 & \text{nếu } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Sau đây, chúng ta trình bày tính chất biến phân của hội tụ lopside

Định lý 2.1.3. *Cho các song hàm ψ^ν, ψ thuộc* fi-biv$(\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$*. Khi đó,*

(a) *nếu ψ^ν hội tụ lopside chặt một phần đến ψ và $\inf_{\mathcal{D}(x)} \psi(x,\cdot)$ có giá trị hữu hạn với mọi $x \in C$ thì mỗi điểm tụ $\bar{x}$ của các điểm maxinf ứng với $C^\nu, \mathcal{D}^\nu(\cdot)$ của các song hàm ψ^ν là điểm maxinf ứng với $C, \mathcal{D}(\cdot)$ của song hàm giới hạn ψ;*

(b) *nếu hội tụ này là chặt hoàn toàn và $\sup_{x \in C} \inf_{y \in \mathcal{D}(x)} \psi(x,y)$ có giá trị hữu hạn thì*

$$\sup_{x \in C^\nu} \inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x)} \psi^\nu(x,y) \to \sup_{x \in C} \inf_{y \in \mathcal{D}(x)} \psi(x,y),$$

hơn nữa, nếu $\bar{x}$ là điểm maxinf của ψ thì ta luôn tìm được

$$x^\nu \in \operatorname{argmax}(\inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(\cdot)} \psi^\nu(\cdot,y))$$

sao cho $x^\nu \to \bar{x}$. Ngược lại, nếu dãy này tồn tại thì

$$\sup_{x \in C^\nu} \inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x)} \psi^\nu(x,y) \to \inf_{y \in \mathcal{D}(\bar{x})} \psi(\bar{x},y).$$

Chứng minh. (a) Ta xét các hàm sau: $l^\nu(x) := \inf_{y\in\mathcal{D}^\nu(x)} \psi^\nu(x,y)$ với $x \in C^\nu$ và $l(x) := \inf_{y\in\mathcal{D}(x)} \psi(x,y)$ với $x \in C$. Ta cần chứng minh l^ν hội tụ hypo đến l. Giả sử rằng $x^\nu \in C^\nu, x^\nu \to x$ và $y_\epsilon \in \mathcal{D}(x)$ sao cho $\psi(x,y_\epsilon) \le l(x)+\epsilon$ với $\epsilon > 0$ tùy ý. Theo Định nghĩa 2.1.1(a), ta có thể tìm $y_\epsilon^\nu \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu)$ sao cho $y_\epsilon^\nu \to y_\epsilon$ và $\limsup_\nu \psi^\nu(x,y_\epsilon^\nu) \le \psi(x,y_\epsilon)$. Do đó,

$$\text{limsup}_\nu l^\nu(x^\nu) \le \text{limsup}_\nu \psi^\nu(x^\nu,y_\epsilon^\nu) \le \psi(x,y_\epsilon) \le l(x)+\epsilon.$$

Vì bất đẳng thức này thỏa với $\epsilon > 0$ bất kỳ nên

$$\text{limsup}_\nu l^\nu(x^\nu) \le l(x). \tag{2.1}$$

Xét $x \in C$ và $x^\nu \in C^\nu$ là một dãy thỏa điều kiện (b) của Định nghĩa 2.1.1. Ta chứng minh rằng $\psi^\nu(x^\nu,\cdot)$ hội tụ epi đến $\psi(x,\cdot)$. Thật vậy, với mọi $y \in \mathcal{D}(x)$, với mọi $y^\nu \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu), y^\nu \to y$, $\text{liminf}_\nu \psi^\nu(x^\nu,y^\nu) \ge \psi(x,y)$. Từ điều kiện (b) của Định nghĩa 2.1.1 và với mọi $y \in \mathcal{D}(x)$ ta có tồn tại $y^\nu \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu)$ sao cho $y^\nu \to y$. Bởi điều kiện (a) của Định nghĩa 2.1.1, $\text{limsup}_\nu \psi^\nu(x^\nu,y^\nu) \le \psi(x,y)$. Do đó, các điều kiện (a) và (b) của Định nghĩa 1.1.4 về hội tụ epi của các hàm $\psi^\nu(x^\nu,\cdot)$ thỏa mãn.

Hơn nữa, điều kiện chặt của hội tụ epi của $\psi^\nu(x^\nu,\cdot)$ thỏa bởi vì ψ^ν hội tụ lopside chặt một phần đến ψ. Áp dụng Định lý 1.2.2(c),

$$\inf_{\mathcal{D}^\nu(x^\nu)} \psi^\nu(x^\nu,\cdot) \to \inf_{\mathcal{D}(x)} \psi(x,\cdot),$$

suy ra $l^\nu(x^\nu) \to l(x)$ do đó,

$$\text{liminf}_\nu l^\nu(x^\nu) \ge l(x). \tag{2.2}$$

Kết hợp (2.1) và (2.2), ta có các hàm l^ν hội tụ hypo đến hàm l.

Các điểm maxinf của ψ^ν và ψ ứng với $C^\nu, \mathcal{D}^\nu(\cdot)$ và $C, \mathcal{D}(\cdot)$ là các điểm cực đại của các hàm l^ν và l tương ứng. Áp dụng Định lý 1.2.2(b), ta có kết luận (a).

(b) Vì l^ν hội tụ hypo đến l, từ điều kiện (a-t) của Định nghĩa 2.1.1, ta có hội tụ hypo chặt. Áp dụng Định lý 1.2.2(c), ta có điều cần chứng minh. □

2.2 Tính xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị

Xét hai ánh xạ đa trị $T : \mathbb{B}^m \rightrightarrows (\mathbb{B}^m)^*$ và $K : \mathbb{B}^m \rightrightarrows \mathbb{B}^m$. Bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị được định nghĩa như sau:

$$\text{QVI}(T, K) \;\; \text{tìm } \bar{x} \in K(\bar{x}) \text{ sao cho } \exists \bar{t} \in T(\bar{x}), \forall y \in K(\bar{x}), \langle \bar{t}, y - \bar{x} \rangle \geq 0.$$

Xét song hàm $\hat{\varphi} :\ \text{Fix}(K) \times \mathbb{B}^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tương ứng với $\text{QVI}(T, K)$ được cho bởi công thức

$$\hat{\varphi}(x, y) := \sup_{t \in T(x)} \langle t, y - x \rangle. \tag{2.3}$$

Với mỗi $x \in\ \text{Fix}(K)$ cố định, rõ ràng $\hat{\varphi}(x, \cdot)$ lồi trong $\mathbb{B}^m$.

Để chứng minh kết quả chính của mục này, chúng ta cần một số kết quả bổ trợ sau đây.

Bổ đề 2.2.1. *Xét bài toán* $\text{QVI}(T, K)$*, nếu* $\text{dom}K \subseteq \text{dom}T$ *và* $\hat{\varphi}$ *xác định bởi (2.3). Khi đó,* $\partial \hat{\varphi}(x, \cdot)(x) = \text{clconv}T(x)$ *với mọi* $x \in \text{Fix}(K)$ *trong đó* ∂ *là dưới vi phân của hàm lồi.*

Chứng minh. Trường hợp 1: $T(x)$ lồi và đóng với mỗi $x \in \text{Fix}(K)$ cố định. Vì $\hat{\varphi}(x, x) = 0$, $\hat{\varphi}(x, y) - \hat{\varphi}(x, x) = \hat{\varphi}(x, y) \geq \langle t, y - x \rangle$ với mọi $t \in T(x)$ và $y \in \mathbb{B}^m$ nên ta có

$$T(x) \subseteq \partial \hat{\varphi}(x, \cdot)(x). \tag{2.4}$$

Để chứng minh chiều ngược lại của bao hàm này, ta giả sử $t_0 \notin T(x)$. Áp dụng định lý tách, tồn tại $\bar{y} \in \mathbb{B}^m$ sao cho

$$\sup_{t \in T(x)} \langle t, \bar{y} \rangle < \langle t_0, \bar{y} \rangle. \tag{2.5}$$

Đặt $y_0 = x + \bar{y}$. Bất đẳng thức (2.5) trở thành

$$\sup_{t \in T(x)} \langle t, y_0 - x \rangle < \langle t_0, y_0 - x \rangle,$$

nghĩa là

$$\hat{\varphi}(x, y_0) - \hat{\varphi}(x, x) < \langle t_0, y_0 - x\rangle.$$

Mặt khác, vì $t_0 \notin \partial\hat{\varphi}(x, \cdot)(x)$ nên

$$\partial\hat{\varphi}(x, \cdot)(x) \subseteq T(x). \tag{2.6}$$

Kết hợp (2.4) và (2.6) ta có $\partial\hat{\varphi}(x, \cdot)(x) = T(x)$.

Trường hợp 2: Cho $T(x)$ tùy ý với mỗi $x \in \text{Fix}(K)$. Ta cần chứng minh

$$\hat{\varphi}(x, y) = \sup_{t\in B}\langle t, y - x\rangle \text{ với mọi } y \in \mathbb{B}^m,$$

ở đó $B :=$ clconv$T(x)$. Thật vậy, với mỗi cặp $x, y \in \mathbb{B}^m$,

$$T(x) \subseteq H := \{t \in (\mathbb{B}^m)^* |\ \langle t, y - x\rangle \leq \hat{\varphi}(x, y)\}.$$

Vì H là nửa không gian đóng nên $B \subseteq H$. Do đó, $\sup_{t\in B}\langle t, y - x\rangle \leq \hat{\varphi}(x, y)$. Chiều ngược lại của bất đẳng thức hiển nhiên. Áp dụng kết quả của trường hợp 1, ta có $\partial\hat{\varphi}(x, \cdot)(x) = B =$ clconv$T(x)$. □

Lưu ý rằng có nhiều công thức tổng quát cho dưới vi phân của cận trên nhỏ nhất theo điểm của các hàm phi tuyến với các giả thiết về tính chất compắc. Tuy nhiên, kết quả của bổ đề trên cho lớp hàm phi tuyến đặc biệt của chúng tôi không cần thêm điều kiện gì cho ánh xạ T.

Trong phần tiếp theo chúng ta xét song hàm có giá trị hữu hạn tương ứng với bài toán QVI(T, K) khi T và K có giá trị lồi đóng như sau, với $x \in \text{Fix}(K)$ và $y \in K(x)$,

$$\varphi(x, y) := \sup_{t\in T(x)}\langle t, y - x\rangle. \tag{2.7}$$

Khi đó $\bar{x}$ là điểm maxinf của φ ứng với $\text{Fix}(K), K(\cdot)$ là

$$\bar{x} \in \text{argmax}_{x\in\text{Fix}(K)}[\inf_{y\in K(x)}\varphi(x, y)].$$

Đặt

$$\hat{\varphi}(\bar{x}, x) := \begin{cases} \varphi(\bar{x}, x) & \text{với } x \in K(\bar{x}), \\ \infty & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Quan hệ tương đương giữa nghiệm của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và điểm maxinf của song hàm tương ứng được trình bày trong định lý sau đây.

Định lý 2.2.2. *Xét bài toán* QVI(T, K)*, giả sử rằng* $\mathrm{dom}K \subseteq \mathrm{dom}T$*,* K *và* T *có giá trị lồi đóng. Khi đó,*

(a) $\bar{x}$ *là nghiệm của bài toán* QVI(T, K) *nếu và chỉ nếu* $\bar{x}$ *là điểm cực tiểu toàn cục của* $\varphi(\bar{x}, \cdot)$ *trên* $K(\bar{x})$*;*

(b) $\bar{x}$ *là nghiệm của bài toán* QVI(T, K) *nếu và chỉ nếu* $\bar{x}$ *là điểm maxinf của* φ *ứng với* Fix(K)*,* $K(\cdot)$*.*

Chứng minh. (a) "Nếu". Với $\bar{x} \in \mathrm{argrmin}_{K(\bar{x})}\varphi(\bar{x}, \cdot)$, ta định nghĩa hai tập sau

$$A := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times K(\bar{x}) : t > \varphi(\bar{x}, x) - \varphi(\bar{x}, \bar{x})\} \text{ và } B := \{0\} \times K(\bar{x}).$$

Dễ thấy rằng, A và B là hai tập lồi và $A \cap B = \emptyset$. Do đó, theo định lý tách tập lồi, tồn tại $(\mu_0, p_0) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{B}^m)^* \setminus \{(0, 0)\}$ sao cho

$$\mu_0 t + \langle p_0, x\rangle \le \mu_0 0 + \langle p_0, y\rangle, \forall (t, x) \in A, \forall y \in K(\bar{x}). \tag{2.8}$$

Khi cho $t \to \infty$, ta có thể thấy rằng $\mu_0 \le 0$. Nếu $\mu_0 = 0$ thì $\langle p_0, x - y\rangle \le 0, \forall x, y \in K(\bar{x})$, khi đó $\langle p_0, z\rangle \le 0$ với mọi $z \in K(\bar{x}) - K(\bar{x})$. Vì $K(\bar{x}) - K(\bar{x})$ là không gian con nên $p_0 = 0$, là điều vô lý. Do đó, $\mu_0 < 0$. Chia hai vế (2.8) cho $-\mu_0 > 0$ và dùng ký hiệu p thay thế cho $-\frac{p_0}{\mu_0}$, khi đó ta có

$$-t + \langle p, x\rangle \le \langle p, y\rangle, \forall x, y \in K(\bar{x}).$$

Khi cho $t \to \varphi(\bar{x}, x) - \varphi(\bar{x}, \bar{x})$,

$$-[\varphi(\bar{x}, x) - \varphi(\bar{x}, \bar{x})] + \langle p, x\rangle \le \langle p, y\rangle, \forall x, y \in K(\bar{x}). \tag{2.9}$$

Cho $y = \bar{x}$, khi đó (2.9) trở thành

$$-[\varphi(\bar{x}, x) - \varphi(\bar{x}, \bar{x})] + \langle p, x\rangle \le \langle p, \bar{x}\rangle, \forall x \in K(\bar{x}).$$

Suy ra

$$\hat{\varphi}(\bar{x}, \bar{x}) - \hat{\varphi}(\bar{x}, x) + \langle p, x - \bar{x}\rangle \le 0, \forall x \in \mathbb{B}^m,$$

nghĩa là $p \in \partial\hat{\varphi}(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})$. Mặt khác, khi cho $x = \bar{x}$, (2.9) trở thành

$$\langle p, y - \bar{x}\rangle \geq 0, \forall y \in K(\bar{x}),$$

suy ra $p \in -N_{K(\bar{x})}(\bar{x})$. Do vậy,

$$p \in \partial\hat{\varphi}(\bar{x}, \cdot)(\bar{x}) \cap (-N_{K(\bar{x})}(\bar{x})).$$

Áp dụng Bổ đề 2.2.1, $\partial\hat{\varphi}(\bar{x}, \cdot)(\bar{x}) = T(\bar{x})$. Do đó, $\exists p \in T(\bar{x}) = \partial\hat{\varphi}(\bar{x}, \cdot)(\bar{x})$ sao cho $\langle p, y - \bar{x}\rangle \geq 0, \forall y \in K(\bar{x})$, nghĩa là $\bar{x}$ là nghiệm của QVI(T, K).

"Chỉ nếu". Ta có $\bar{x}$ là nghiệm của QVI(T, K) tương đương với $\bar{x}$ là nghiệm của VI$(T, K(\bar{x}))$. Áp dụng Bổ đề 2.2.1, ta có

$$\begin{aligned}
0 \in \partial\hat{\varphi}(\bar{x}, \cdot)(\bar{x}) + N_{K(\bar{x})}(\bar{x}) &\Leftrightarrow \exists p \in \partial\hat{\varphi}(\bar{x}, \cdot)(\bar{x}) \cap (-N_{K(\bar{x})}(\bar{x})) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\varphi}(\bar{x}, x) - \hat{\varphi}(\bar{x}, \bar{x}) \geq \langle p, y - \bar{x}\rangle, \forall y \in \mathbb{B}^m, \\ \langle p, y - \bar{x}\rangle \geq 0, \forall y \in K(\bar{x}) \end{cases} \\
&\Rightarrow \varphi(\bar{x}, x) - \varphi(\bar{x}, \bar{x}) \geq 0, \forall y \in K(\bar{x}),
\end{aligned}$$

nghĩa là $\bar{x}$ là điểm cực tiểu toàn cục của $\varphi(\bar{x}, \cdot)$ trên $K(\bar{x})$.

(b) Với mỗi điểm bất động của K, ta có $\inf_{y \in K(x)} \varphi(x, y) \leq \varphi(x, x) = 0$. Áp dụng phần (a), x là điểm cực tiểu toàn cục của $\varphi(x, \cdot)$ trên $K(x)$ tương đương với

$$\max_{x \in \text{ Fix}(K)} \inf_{y \in K(x)} \varphi(x, y) = 0. \tag{2.10}$$

Ta có các kết quả tương đương như sau.

$$\begin{aligned}
\bar{x} \text{ là nghiệm của QVI}(T, K) &\Leftrightarrow \bar{x} \text{ là điểm cực tiểu toàn cục của } \varphi(\bar{x}, \cdot) \text{ trên } K(\bar{x}) \\
&\Leftrightarrow \bar{x} \in \text{Fix}(K) \text{ và } \inf_{y \in K(\bar{x})} \varphi(\bar{x}, y) = 0 \\
&\Leftrightarrow \bar{x} \in \text{Fix}(K) \text{ và } \bar{x} \text{ là max của } \inf_{y \in K(\cdot)} \varphi(\cdot, y) \text{ trên Fix}(K) \\
&\Leftrightarrow \bar{x} \text{ là điểm maxinf của } \varphi \text{ ứng với Fix}(K), K(\cdot).
\end{aligned}$$

□

Tiếp theo ta nhắc lại điều kiện đủ cho sự hội tụ các tập điểm bất động của các ánh xạ đa trị.

Bổ đề 2.2.3. (*xem* [*61*], *Định lý 2.1*) *Cho* $C \subseteq \mathbb{B}^m$ *là tập compắc khác rỗng và các ánh xạ đa trị* G^ν, G *đi từ* C *vào* $\mathbb{B}^m$. *Giả sử rằng* G^ν *và* G *có giá trị lồi compắc và Lipschitz trên* C *với cùng hằng số Lipschitz* $L \in [0,1)$ *và* $G^\nu \overset{c}{\to} G$ *trên* C. *Khi đó,* $\mathrm{Fix}(G^\nu) \xrightarrow{P-K} \mathrm{Fix}(G)$.

Sau đây chúng ta xét điều kiện đủ cho sự hội tụ các miền hữu hiệu của các ánh xạ đa trị.

Bổ đề 2.2.4. *Cho* G *và* $G^\nu, \nu \in \mathbb{N}$, *là các ánh xạ đa trị đi từ* $\mathbb{B}^m$ *vào* $\mathbb{B}^m$ *và* G^ν *hội tụ graph đến* G. *Khi đó,* $\mathrm{dom}G^\nu \xrightarrow{P-K} \mathrm{dom}G$ *nếu* G^ν *là ánh xạ lồi và* G *là ánh xạ bị chặn hoặc* G^ν *có đồ thị bị chặn phần cuối. Kết luận này vẫn đúng khi hội tụ graph được thay bởi hội tụ liên tục hoặc các dạng hội tụ này được thay bằng hội tụ trên* $\left(\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{dom}G^\nu\right) \bigcup \mathrm{dom}G$.

Chứng minh. Xét P là phép chiếu từ $\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^m$ vào $\mathbb{B}^m$ sao cho $\mathrm{dom}G^\nu = \mathrm{P}(\mathrm{gph}G^\nu)$. Theo tính chất liên tục của P,

$$\mathrm{P}(\mathrm{Liminf}_\nu \mathrm{gph}G^\nu) \subseteq \mathrm{Liminf}_\nu \mathrm{P}(\mathrm{gph}G^\nu) \text{ và } \mathrm{P}(\mathrm{Limsup}_\nu \mathrm{gph}G^\nu) \subseteq \mathrm{Limsup}_\nu \mathrm{P}(\mathrm{gph}G^\nu).$$

Ta chứng minh rằng bao hàm thức thứ hai ở trên xảy ra đẳng thức. Với mỗi $x \in \mathrm{Limsup}_\nu \mathrm{P}(\mathrm{gph}G^\nu)$, tồn tại dãy con $w^{\nu_k} \in \mathrm{gph}G^{\nu_k}$ sao cho $\mathrm{P}(w^{\nu_k}) \to x$ khi $k \to \infty$.

Xét G^ν là ánh xạ lồi, áp dụng Định lý 4.25(a) trong [17], hội tụ graph của G^ν trùng với hội tụ graph hoàn toàn. Do đó, dãy w^{ν_k} phải bị chặn vì $\mathrm{gph}G$ bị chặn. Khi đó, tồn tại điểm tụ $w \in \mathrm{Limsup}_\nu \mathrm{gph}G^\nu$. Từ tính chất liên tục của P, $\mathrm{P}(w) = x$. Vì x được chọn tùy ý nên ta có $\mathrm{P}(\mathrm{Limsup}_\nu \mathrm{gph}G^\nu) = \mathrm{Limsup}_\nu \mathrm{P}(\mathrm{gph}G^\nu)$. Suy ra

$$\mathrm{Limsup}_\nu \mathrm{P}(\mathrm{gph}G^\nu) = \mathrm{P}(\mathrm{gph}G) \subseteq \mathrm{Liminf}_\nu \mathrm{P}(\mathrm{gph}G^\nu).$$

Do đó, $\mathrm{P}(\mathrm{gph}G^\nu) \xrightarrow{P-K} \mathrm{P}(\mathrm{gph}G)$, nghĩa là $\mathrm{dom}G^\nu \xrightarrow{P-K} \mathrm{dom}G$.

Trong trường hợp G^ν có đồ thị bị chặn phần cuối, vì G^ν hội tụ graph đến G nên dãy w^{ν_k} được xét trong trường hợp đầu cũng bị chặn và ta có chứng minh tương tự như trên.

Hơn nữa, vì hội tụ liên tục kéo theo hội tụ graph nên ta có kết luận tương tự cho các trường hợp còn lại. □

Các xấp xỉ của $\mathrm{QVI}(T, K)$ có dạng như sau:

$\mathrm{QVI}(T^\nu, K^\nu)$ tìm $x^\nu \in K^\nu(x^\nu)$ sao cho $\exists t^\nu \in T^\nu(x^\nu), \forall y \in K^\nu(x^\nu), \langle t^\nu, y - x^\nu \rangle \geq 0,$

trong đó $T^\nu : \mathbb{B}^m \rightrightarrows (\mathbb{B}^m)^*$ và $K^\nu : \mathbb{B}^m \rightrightarrows \mathbb{B}^m$. Ta ký hiệu $\mathcal{Q}$ và $\mathcal{Q}^\nu$ lần lượt là các tập nghiệm của $\mathrm{QVI}(T, K)$ và $\mathrm{QVI}(T^\nu, K^\nu)$. Áp dụng Định lý 2.2.2(b), ta có $\mathcal{Q}^\nu$ là tập các điểm maxinf của các song hàm có giá trị hữu hạn xác định bởi công thức sau

$$\varphi^\nu(x, y) := \sup_{t \in T^\nu(x)} \langle t, y - x \rangle$$

với $x \in \mathrm{Fix}(K^\nu)$ và $y \in K^\nu(x)$.

Điều kiện đủ cho $\mathcal{Q}^\nu$ hội tụ Painlevé-Kuratowski đến $\mathcal{Q}$ được trình bày trong định lý sau đây.

Định lý 2.2.5. *Với các bài toán* $\mathrm{QVI}(T, K)$ *và* $\mathrm{QVI}(T^\nu, K^\nu)$*, giả sử rằng các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) T^ν *có giá trị lồi đóng, đồ thị bị chặn phần cuối và hội tụ graph đến* T;

(ii) K^ν, K *là Lipschitz trên* $\left(\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathrm{Fix}(K^\nu)\right) \bigcup \mathrm{Fix}(K)$ *với cùng hằng số* $L \in [0, 1)$;

(iii) K^ν *là ánh xạ lồi có giá trị đóng,* $K^\nu \overset{c}{\to} K$ *trên* $\left(\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathrm{Fix}(K^\nu)\right) \bigcup \mathrm{Fix}(K)$ *và* K *bị chặn*;

(iv) $\mathrm{dom}K \subseteq \mathrm{dom}T$ *và* $\mathrm{dom}K^\nu \subseteq \mathrm{dom}T^\nu$ *với* ν *đủ lớn.*

Khi đó, φ^ν *hội tụ lopside đến* φ *ứng với* K^ν, K *và* $\mathcal{Q}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{Q}$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.2.4, ta có $\mathrm{dom}T^\nu \xrightarrow{P-K} \mathrm{dom}T$ bởi (i) và $\mathrm{dom}K^\nu \xrightarrow{P-K} \mathrm{dom}K$ bởi (iii). Từ các giả thiết (ii) và (iii), Bổ đề 2.2.3 chỉ ra rằng $\mathrm{Fix}(K^\nu) \xrightarrow{P-K} \mathrm{Fix}(K)$.

Ta cần chứng minh φ^ν hội tụ lopside đến φ ứng với K^ν, K (theo Định nghĩa 2.1.1, ta xem K^ν và K lần lượt là các ánh xạ đi từ $\mathrm{Fix}(K^\nu)$ vào $K^\nu(\mathrm{Fix}(K^\nu))$ và từ $\mathrm{Fix}(K)$ vào $K(\mathrm{Fix}(K))$, tương ứng).

Trước tiên ta kiểm tra điều kiện (a) của Định nghĩa 2.1.1. Với mỗi $x^\nu \in \mathrm{Fix}(K^\nu)$ với $x^\nu \to x$ và $y \in K(x)$, từ (iii) ta có $y^\nu \in K^\nu(x^\nu)$ sao cho $y^\nu \to y$. Từ (i), ta có

$T^\nu(x^\nu)$ là ánh xạ đóng và tồn tại tập bị chặn $B \subseteq (\mathbb{B}^m)^*$ chứa $T^\nu(x^\nu)$ với mọi ν đủ lớn. Do đó, tồn tại $\bar{t}^\nu(y^\nu) \in T^\nu(x^\nu)$ sao cho

$$\varphi^\nu(x^\nu, y^\nu) = \langle \bar{t}^\nu(y^\nu), y^\nu - x^\nu \rangle$$

và $\bar{t}^\nu(y^\nu)$ (hoặc dãy con của nó) hội tụ đến $\bar{t}$. Áp dụng Định lý 5.37 trong [67] về xấp xỉ của bao hàm thức, ta thấy rằng $\bar{t}$ phải là nghiệm đúng của bao hàm thức $x \in T^{-1}(\bar{t})$, nghĩa là $\bar{t} \in T(x)$. Do đó,

$$\begin{aligned} \text{limsup}_\nu \varphi^\nu(x^\nu, y^\nu) &= \text{limsup}_\nu (\langle \bar{t}^\nu(y^\nu), y^\nu - x^\nu \rangle \\ &= \langle \bar{t}, y - x \rangle \\ &\leq \sup_{t \in T(x)} \langle t, y - x \rangle \\ &= \varphi(x, y) \end{aligned}$$

suy ra điều kiện (a) của Định nghĩa 2.1.1 thỏa mãn.

Để kiểm tra điều kiện (b) về hội tụ lopside, ta xét phần tử $\bar{x} \in \text{Fix}(K)$. Với mỗi $x^\nu \in \text{Fix}(K^\nu)$ mà $x^\nu \to \bar{x}$ và mỗi $y^\nu \in K^\nu(x^\nu)$ sao cho $y^\nu \to y$, ta có y phải thuộc tập $K(\bar{x})$. Vì $T(\bar{x})$ compắc (theo giả thiết (i)), tồn tại $\bar{t}(y) \in T(\bar{x})$ sao cho

$$\varphi(\bar{x}, y) = \langle \bar{t}(y), y - \bar{x} \rangle.$$

Áp dụng lại Định lý 5.37 trong [67], ta có dãy $\bar{x}^\nu \in \text{Fix}(K^\nu)$ hội tụ về $\bar{x}$ và $\bar{t}^\nu \in T^\nu(\bar{x}^\nu)$ sao cho $\bar{t}^\nu \to \bar{t}(y)$. Với mọi $y^\nu \in K^\nu(x^\nu)$ mà $y^\nu \to y$, ta có

$$\varphi^\nu(\bar{x}^\nu, y^\nu) \geq \langle \bar{t}^\nu, y^\nu - \bar{x}^\nu \rangle.$$

Khi lấy giới hạn theo liminf, ta được

$$\begin{aligned} \text{liminf}_\nu \varphi^\nu(\bar{x}^\nu, y^\nu) &\geq \liminf_\nu (\langle \bar{t}^\nu, y^\nu - \bar{x}^\nu \rangle \\ &= \langle \bar{t}(y), y - \bar{x} \rangle \\ &= \varphi(\bar{x}, y) \end{aligned}$$

tức là điều kiện (b) của Định nghĩa 2.1.1 thỏa. Vậy φ^ν hội tụ lopside đến φ .

Từ (iii), với các dãy $\bar{x}^\nu, \bar{x}$ được xét ở phần trên, mọi tập $K^\nu(\bar{x}^\nu)$ và $K(\bar{x})$ đều được chứa trong một tập compắc nào đó của $\mathbb{B}^m$ với ν đủ lớn. Do đó, hội tụ lopside của φ^ν là chặt một phần. Tiếp theo, chúng ta áp dụng Định lý 2.2.2(b) để thay thế các tập nghiệm $\mathcal{Q}^\nu$, $\mathcal{Q}$ bằng các tập các điểm maxinf của φ^ν và φ tương ứng. Vì hội tụ của dãy song hàm này là chặt một phần, Định lý 2.1.3(a) chỉ ra rằng $\mathrm{Limsup}_\nu \mathcal{Q}^\nu \subseteq \mathcal{Q}$. Hơn nữa, vì $\mathrm{Fix}(K^\nu)$ và $\mathrm{Fix}(K)$ đều được chứa trong một tập compắc nào đó của $\mathbb{B}^m$ với ν đủ lớn, điều kiện chặt hoàn toàn cũng thỏa mãn. Từ (2.10), $\sup_{x\in \mathrm{Fix}(K)} \inf_{y\in K(x)} \varphi(x,y)$ hữu hạn. Áp dụng Định lý 2.1.3(b), ta có $\mathcal{Q}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{Q}$. □

Theo sự hiểu biết của chúng tôi, các kết quả xấp xỉ đã được thiết lập cho các bài toán biến phân, xem [32, 33] hoặc cho bài toán cân bằng, xem [51] nhưng chưa công bố tương ứng cho các bài toán tựa biến phân. Định lý 2.2.5 là kết quả đầu tiên cho các bài toán tựa biến phân. Định lý 2.2.5 mở rộng Định lý 5.2 của A. Jofré và R. J. B. Wets [33] cho bài toán bất đẳng thức biến phân và Mệnh đề 5.4 của R. Lopez [51] cho bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị bởi vì tập ràng buộc của các bài toán này không phụ thuộc vào biến quyết định.

Như đã trình bày trong phần giới thiệu, tựa bất đẳng thức biến phân đa trị là mô hình tổng quát của nhiều bài toán liên quan đến tối ưu. Sau đây, chúng ta trình bày các áp dụng cho trò chơi không hợp tác, mô hình kinh tế thuần túy trao đổi và mạng giao thông.

2.3 Tính xấp xỉ của bài toán cân bằng Nash mở rộng

Chúng ta xét trò chơi không hợp tác gồm I người chơi. Mỗi người chơi i cần tìm véctơ chiến thuật $x_i := (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k_i}}) \in \mathbb{B}^{k_i}$ với k_i thành phần. Véctơ $x := (x_1, \ldots, x_I) \in \mathbb{B}^n$ là biến quyết định của I người chơi, trong đó $n = \sum_{i=1}^I k_i$. Để phân biệt người chơi thứ i, ta sử dụng ký hiệu $x := (x_i, x_{\hat{i}})$. Mỗi người chơi i có hàm mục tiêu $\theta_i : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ phụ thuộc vào tất cả các người chơi còn lại. Hơn nữa, tập các chiến thuật của người chơi i phụ thuộc vào $x_{\hat{i}}$ của những người chơi khác. Khi đó, ta có ánh xạ đa trị $X_i : \mathbb{B}^{\hat{i}} \rightrightarrows \mathbb{B}^{k_i}$. Ký hiệu $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$ và

$$X(x) := (X_1(x_{-1}), \ldots, X_I(x_{-I})) = \{y \in \mathbb{B}^n | y_i \in X_i(x_{\hat{i}}), \forall i = 1, \ldots, I\} \text{ với } x \in \mathbb{B}^n.$$

Véctơ chiến thuật $\bar{x}$ của I người chơi được gọi là cân bằng Nash mở rộng nếu không có người chơi nào có thể cải thiện hàm mục tiêu của mình bằng cách tự thay đổi chiến thuật của người đó, nghĩa là $\bar{x} \in X(\bar{x})$ sao cho, với mọi $i \in \{1, \ldots, I\}$,

$$\theta_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \leq \theta_i(x_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \text{ với mọi } x_i \in X_i(\bar{x}_{\hat{i}}).$$

Trường hợp tập chiến thuật của mỗi người chơi không phụ thuộc vào chiến thuật của những người chơi còn lại thì khái niệm này trở thành khái niệm cân bằng Nash cổ điển. Ký hiệu GNEP(θ, X) là trò chơi cân bằng mở rộng và $\mathcal{G}$ là tập các cân bằng Nash mở rộng của GNEP(θ, X).

Để biến đổi trò chơi GNEP(θ, X) về bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị ta cần nhắc lại một số khái niệm sau đây.

Toán tử nón pháp tuyến, xem [6], cho tập mức dưới điều chỉnh của hàm mục tiêu θ_i được cho bởi công thức sau

$$N^a_{\theta_i}(x_i) := \{v_i \in (\mathbb{B}^{k_i})^* | \langle v_i, u_i - x_i \rangle \leq 0, \forall u_i \in L^a_{\theta_i(\cdot, x_{\hat{i}})}(x_i)\}.$$

Ta xét $N^a_\theta : \mathbb{B}^n \rightrightarrows (\mathbb{B}^n)^*$ được cho bởi công thức, với mỗi $x \in \mathbb{B}^n$,

$$N^a_\theta(x) := F_1(x) \times \cdots \times F_N(x),$$

ở đó

$$F_i(x) := \begin{cases} \bar{B}^i(0,1) & \text{nếu } x_i \in \operatorname{argmin}_{\mathbb{B}^{k_i}} \theta_i(\cdot, x_{\hat{i}}), \\ \operatorname{conv}(N^a_{\theta_i}(x_i) \cap S^i(0,1)) & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$

$$\bar{B}^i(0,1) := \{z \in \mathbb{B}^{k_i} | \|z\| \leq 1\},$$
$$S^i(0,1) := \{z \in \mathbb{B}^{k_i} | \|z\| = 1\}.$$

Theo Định lý 4.2 trong [6], ta có mối quan hệ tương đương giữa điểm cân bằng Nash mở rộng của trò chơi không hợp tác và nghiệm của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng như sau.

Bổ đề 2.3.1. *Giả sử rằng, với $i \in I$, hàm mục tiêu θ_i là liên tục và tựa lồi nửa chặt tương ứng với biến thứ i và X có giá trị lồi. Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm của* GNEP(θ, X) *nếu và chỉ nếu $\bar{x}$ là nghiệm của* QVI(N^a_θ, X).

Giả sử rằng $\mathbb{B}^n$ là không gian Euclide. Chúng ta sẽ thiết lập các xấp xỉ của GNEP(θ, X) theo nghĩa hội tụ graph của các ánh xạ đa trị $N^a_{\theta^\nu}$ đến N^a_θ và hội tụ liên tục của ánh xạ chiến thuật X^ν đến X. Cụ thể ta xét

$$N^a_{\theta^\nu}(x) := F^\nu_1(x) \times \cdots \times F^\nu_N(x),$$

ở đó

$$F^\nu_i(x) \ := \begin{cases} \bar{B}^i(0,1) & \text{nếu } x_i \in \ \operatorname{argmin}_{\mathbb{B}^{k_i}} \theta^\nu_i(\cdot, x_{\hat{i}}), \\ \operatorname{conv}(N^a_{\theta^\nu_i}(x_i) \cap S^i(0,1)) & \text{trong trường hợp ngược lại.} \end{cases}$$

Ký hiệu $\mathcal{G}^\nu$ là tập nghiệm của GNEP(θ^ν, X^ν).

Định lý 2.3.2. *Giả sử rằng, với mỗi $i \in \{1, \ldots, I\}$, các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *θ_i và θ^ν_i là liên tục và tựa lồi nửa chặt ứng với biến thứ i;*

(ii) *$N^a_{\theta^\nu}$ có đồ thị bị chặn phần cuối và hội tụ graph đến N^a_θ;*

(iii) *X^ν là Lipschitz trên $\left(\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathrm{Fix}(X^\nu)\right) \bigcup \mathrm{Fix}(X)$ với cùng hằng số L thuộc $[0,1)$;*

(iv) *$X^\nu \xrightarrow{c} X$ trên $\left(\bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} \mathrm{Fix}(X^\nu)\right) \bigcup \mathrm{Fix}(X)$, X^ν là lồi với giá trị đóng và X bị chặn;*

(v) dom$\mathcal{X} \subseteq$ domN^a_θ, dom$\mathcal{X}^\nu \subseteq$ dom$N^a_{\theta^\nu}$.

Khi đó, $\mathcal{G}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{G}$ với ν đủ lớn.

Chứng minh. Từ (i) và (iv), Bổ đề 2.3.1 chỉ ra rằng x^ν là nghiệm của GNEP(θ^ν, X^ν) khi và chỉ khi x^ν là nghiệm của QVI$(N^a_{\theta^\nu}, X^\nu)$. Theo Mệnh đề 4.2 trong [14] và (i), $N^a_{\theta^\nu}$ và N^a_θ có giá trị lồi compắc. Do đó, các giả thiết của Định lý 2.2.5 thỏa mãn. Suy ra $\mathcal{G}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{G}$. □

Định lý 7.4 của A. Jofré và R. J. B. Wets [33] là trường hợp đặc biệt của Định lý 2.3.2 khi các hàm mục tiêu là các hàm lồi và các tập chiến thuật không phụ thuộc và biến quyết định.

2.4 Tính xấp xỉ của nền kinh tế thuần túy trao đổi

Xét nền kinh tế thuần túy trao đổi gồm n đại lý, mỗi đại lý được gán một chỉ số $i \in I := \{1, \dots, n\}$ và l mặt hàng, mỗi mặt hàng được đánh số thứ tự $j \in J := \{1, \dots, l\}$. Ta ký hiệu e_{i_j} và x_{i_j} lần lượt là số lượng mặt hàng j được sở hữu và tiêu thụ bởi đại lý i. Khi đó, $e_i := (e_{i_1}, \dots, e_{i_l}) \in \mathbb{R}^l_+$ và $x_i := (x_{i_1}, \dots, x_{i_l}) \in \mathbb{R}^l_+$ lần lượt là các véctơ đặc trưng cho lượng hàng hóa ban đầu và lượng tiêu thụ của đại lý i và $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n \times l}$ đại diện cho lượng tiêu thụ của thị trường. Giả sử rằng mỗi đại lý i đại diện cho sản phẩm j mà $e_{i_j} > 0$ với mọi $j \in J$. Với mỗi sản phẩm $j \in J$, có giá không âm p_j tương ứng. Ký hiệu $p := (p_1, \dots, p_l) \in \mathbb{R}^l_+$ là véctơ giá và p thuộc tập

$$P := \{p \in \mathbb{R}^l_+ | \sum_{j=1}^{l} p_j = 1\}.$$

Trong mô hình kinh tế thuần túy trao đổi, các đại lý tác động với nhau theo quy luật cung cầu nhằm xác định giá cả, số lượng hàng hoá và các dịch vụ trên thị trường. Khi đó, mỗi x_i sẽ có hàm lợi nhuận $u_i : \mathbb{R}^l_+ \to \mathbb{R}$ tương ứng. Vì các đại lý đều mong muốn có tỷ suất lợi nhuận tối đa nên ta có bài toán tối ưu, với mọi $i \in I$ và với mọi $p \in P$,

$$\text{tìm } \bar{x}_i \in M_i(p) \text{ sao cho } u_i(\bar{x}_i) = \max_{x_i \in M_i(p)} u_i(x_i),$$

ở đó ánh xạ đa trị $M_i : P \rightrightarrows \mathbb{R}^l_+$ được cho bởi công thức

$$M_i(p) := \{x_i \in \mathbb{R}^l_+ | \langle p, x_i \rangle \leq \langle p, e_i \rangle\}$$

là tập ràng buộc về ngân sách của đại lý i ứng với giá p.

Với $\bar{p} \in P$ và $\bar{x} \in \prod_{i \in I} M_i(\bar{p})$, véctơ $(\bar{p}, \bar{x})$ được gọi là điểm cân bằng cạnh tranh của nền kinh tế thuần túy trao đổi nếu

$$u_i(\bar{x}_i) = \max_{x_i \in M_i(\bar{p})} u_i(x_i), \text{với mọi } i \in I,$$

$$\sum_{i\in I}(\bar{x}_{i_j} - e_{i_j}) \leq 0, \text{với mọi } j \in J.$$

Ta có nhận xét, với mọi $p \in P$, nếu $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n\times l}$ sao cho, với mọi $i \in I$, $\hat{x}_i$ là nghiệm của bài toán tối ưu

$$\max_{x_i \in M_i(p)} u_i(x_i),$$

thì luật cân bằng Walras thỏa mãn theo nghĩa mở rộng, cụ thể là

$$\langle p, \sum_{i\in I}(\hat{x}_i - e_i)\rangle \leq 0.$$

Khi bất đẳng thức này xảy ra dấu bằng thì luật cân bằng Walras thỏa mãn theo nghĩa hẹp, tức là

$$\langle p, \sum_{i\in I}(\hat{x}_i - e_i)\rangle = 0. \tag{2.11}$$

Với mọi $i \in I$, ta xét ánh xạ đa trị $G_i : \mathbb{R}^l_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^l$ được cho bởi công thức

$$G_i(x_i) \ := \begin{cases} \bar{B}^i(0,1) & \text{nếu } x_i \in \ \operatorname{argmin}_{\mathbb{B}^l_+}(-u_i), \\ \operatorname{conv}(N^a_{-u_i}(x_i) \cap S^i(0,1)) & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$

Đặt $M(p) := (M_1(p), \ldots, M_n(p)), G(x) := (G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n))$ và $u := (u_1, \ldots, u_n)$.

Ký hiệu $\mathrm{PEE}(u, P \times M)$ là bài toán tìm các điểm cân bằng cạnh tranh và $\mathcal{P}$ là tập nghiệm của $\mathrm{PEE}(u, P \times M)$. Bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng với bài toán $\mathrm{PEE}(u, P \times M)$ là $\mathrm{QVI}(G, P \times M)$ được xác định như sau

$$\text{tìm } (\bar{p}, \bar{x}) \in P \times M(\bar{p}) \text{ và } h \in G(\bar{x}) \text{ sao cho}$$

$$\sum_{i\in I}\langle h_i, x_i - \bar{x}_i\rangle + \langle\sum_{i\in I}(e_i - \bar{x}_i), p - \bar{p}\rangle \geq 0, \ \text{với mọi } (p, x) \in P \times M(\bar{p}).$$

Mối quan hệ tương đương giữa điểm cân bằng cạnh tranh và nghiệm của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị được trình bày trong bổ đề sau, xem Định lý 3.2 trong [14].

Bổ đề 2.4.1. *Giả sử rằng u_i là liên tục và tựa lõm nửa chặt với mọi $i \in I$ và* (2.11) *thỏa. Khi đó, $(p, x) \in P \times M(p)$ là cân bằng cạnh tranh của* $\mathrm{PEE}(u, P \times M)$ *khi và chỉ khi (p, x) là nghiệm của* $\mathrm{QVI}(G, P \times M)$.

Ta xét dãy nền kinh tế thuần túy trao đổi PEE($u^\nu, P \times M^\nu$) xấp xỉ, ở đó M^ν, u^ν được định nghĩa tương tự như M, u. Ký hiệu $\mathcal{P}^\nu$ là các tập các điểm cân bằng cạnh tranh của PEE($u^\nu, P \times M^\nu$).

Định lý 2.4.2. *Giả sử rằng, với mỗi $i \in I$, các điều kiện sau đây thỏa*

(i) *u_i và u_i^ν là liên tục và tựa lõm nửa chặt và (2.11) thỏa;*

(ii) *G^ν có đồ thị bị chặn phần cuối và G^ν hội tụ graph đến G;*

(iii) *M^ν là lồi và Lipschitz trên P với cùng hằng số L thuộc $[0,1)$ và M bị chặn;*

(iv) *$\mathrm{dom}M \subseteq \mathrm{dom}G$ và $\mathrm{dom}M^\nu \subseteq \mathrm{dom}G^\nu$ với ν đủ lớn.*

Khi đó, $\mathcal{P}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{P}$.

Chứng minh. Từ (i), áp dụng Bổ đề 2.4.1, ta có (p, x^ν) là nghiệm của PEE($u^\nu, P \times M^\nu$) khi và chỉ khi (p, x^ν) là nghiệm của QVI($G^\nu, P \times M^\nu$). Áp dụng Mệnh đề 4.2 trong [14] và (i), ta có G^ν và G có giá trị lồi compắc. Theo Mệnh đề 1 trong [31], với mọi $i \in I$, M_i có giá trị lồi compắc và $M_i^\nu \xrightarrow{c} M_i$ trên P suy ra $M^\nu \xrightarrow{c} M$ trên P. Do đó, các giả thiết của Định lý 2.2.5 thỏa mãn. Suy ra, $\mathcal{P}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{P}$. $\square$

Định lý 8.4 của A. Jofré và R. J. B. Wets [33] là trường hợp riêng của Định lý 2.4.2 cho nền kinh tế thuần túy trao đổi với lớp hàm lợi nhuận lõm.

Ví dụ 2.4.3. Chúng ta xét nền kinh tế thuần túy trao đổi gồm hai đại lý và hai mặt hàng. Giả sử rằng lượng hàng sở hữu bởi hai đại lý lần lượt là $e_1 = (6, 2)$ và $e_2 = (2, 4)$. Hàm lợi nhuận của mỗi đại lý lần lượt được cho như sau:

$$u_1(x_1) = x_{1_1}.x_{1_2} \text{ và } u_2(x_2) = x_{2_1}.x_{2_2}.$$

Vì u_1 và u_2 là các hàm Cobb-Douglas nên tựa lõm nửa chặt (xem [14]). Áp dụng giải thuật tìm điểm cân bằng Walras, ta tìm được giá cân bằng $\bar{p} = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$ và điểm cân bằng $\bar{x} = ((\frac{13}{3}, \frac{13}{4}), (\frac{11}{3}, \frac{11}{4}))$.

Do đó, $P = \{p \in \mathbb{R}^2_+ | \ p_1 + p_2 = 1\}$. Với $\bar{p} = (\frac{3}{7}, \frac{4}{7})$, $M_1(\bar{p}) = \{x_1 \in \mathbb{R}^2_+ | \ 3x_{1_1} + 4x_{1_2} \leq 26\}$ và $M_2(\bar{p}) = \{x_2 \in \mathbb{R}^2_+ | \ 3x_{2_1} + 4x_{2_2} \leq 22\}$. Với $\bar{x}_1 = (\frac{13}{3}, \frac{13}{4})$, ta có

$L^a_{-u_1}(\bar{x}_1) = (\frac{13}{3}, \frac{13}{4}) + \mathbb{R}^2_+$, $N^a_{-u_1}(\bar{x}_1) = -\mathbb{R}^2_+$ và $G_1(\bar{x}_1) = \{h \in \mathbb{R}^2_- | \ h_1^2 + h_2^2 \leq 1, h_1 + h_2 \leq -1\}$. Với $\bar{x}_2 = (\frac{11}{3}, \frac{11}{4})$, ta có $L^a_{-u_2}(\bar{x}_2) = (\frac{11}{3}, \frac{11}{4}) + \mathbb{R}^2_+$, $N^a_{-u_2}(\bar{x}_2) = -\mathbb{R}^2_+$ và $G_2(\bar{x}_2) = \{h \in \mathbb{R}^2_- | \ h_1^2 + h_2^2 \leq 1, h_1 + h_2 \leq -1\}$.

Ta kiểm tra rằng $(\bar{p}, \bar{x})$ là nghiệm của QVI$(G, P \times M)$. Với $h = ((-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})) \in G(\bar{x})$ ta có, với mọi $(p, x) \in P \times M(\bar{p})$,

$$\langle h_1, x_1 - \bar{x}_1 \rangle + \langle h_2, x_2 - \bar{x}_1 \rangle = \frac{1}{2}[8 - (x_{1_1} + x_{1_2})] + \frac{1}{2}[6 - (x_{2_1} + x_{2_2})] \geq 0$$

và

$$(e_1 - \bar{x}_1) + (e_2 - \bar{x}_2) = (0, 0).$$

Do đó,

$$\sum_{i=1}^{2} \langle h_i, x_i - \bar{x}_i \rangle + \langle \sum_{i=1}^{2} (e_i - \bar{x}_i), p - \bar{p} \rangle \geq 0, \forall (p, x) \in P \times M(\bar{p}).$$

Hơn nữa chúng ta có thể xấp xỉ θ_i bởi một dãy các hàm tựa lõm nửa chặt hội tụ liên tục đến θ_i tương ứng với $M^\nu := M \cap \bar{B}(0, \nu)$. Khi đó, các điều kiện của Định lý 2.4.2 được đảm bảo nếu tập mức điều chỉnh của các hàm xấp xỉ thỏa điều kiện dưới trơn phù hợp. Vì vậy, các tập điểm cân bằng Walras của các nền kinh tế thuần túy trao đổi xấp xỉ sẽ hội tụ đến điểm cân bằng của bài toán gốc.

2.5 Tính xấp xỉ của bài toán cân bằng giao thông

Bài toán mạng giao thông được định nghĩa như sau. Cho N là tập các nút, L là tập các cung, $W = (W_1, \ldots, W_l)$ là tập các cặp đầu/cuối. Giả sử cặp đầu/cuối $W_j, j = 1, \ldots, l$, được nối bởi tập các đường P_j và P_j có $r_j \geq 1$ đường. Xét $F = (F_1, \ldots, F_m)$ là véctơ dòng đường, với $m = r_1 + \cdots + r_l$. Xét tập các véctơ dòng đường có ràng buộc tải năng

$$F \in A := \{F \in \mathbb{B}^m : 0 \leq F_s \leq \gamma_s, s = 1, \ldots, m\},$$

trong đó γ_s là các số thực cho trước. Giả sử hơn nữa rằng giá lưu thông trên dòng đường F_s, $s = 1, \ldots, m$, phụ thuộc vào véctơ dòng đường F và $T_s(F) \subseteq \mathbb{R}_+$. Khi đó ta có ánh xạ đa trị $T : \mathbb{B}^m_+ \rightrightarrows \mathbb{B}^m_+$, với $T(F) = (T_1(F), \ldots, T_m(F))$.

Dạng mở rộng của nguyên lý cân bằng Wardrop trong trường hợp hàm giá đa trị được phát biểu trong định nghĩa sau đây, xem [35].

Định nghĩa 2.5.1. *Véctơ dòng đường $H \in A$ được gọi là dòng cân bằng nếu, với mỗi cặp đầu/cuối W_j, $j = 1, \ldots, l$, và với mọi đường q, s nối cặp đầu/cuối này (nghĩa là $q, s \in P_j$) thì tồn tại giá $t \in T(H)$ sao cho*

$$t_q < t_s \Longrightarrow H_q = \gamma_q \text{ hoặc } H_s = 0.$$

Giả sử rằng nhu cầu lưu thông ρ_j của cặp đầu/cuối $W_j, j = 1, \ldots, l$, phụ thuộc vào dòng cân bằng H. Khi xét tất cả các cặp đầu/cuối, ta có ánh xạ $\rho : \mathbb{B}^m_+ \to \mathbb{B}^l_+$. Ta sử dụng ký hiệu Kronecker sau

$$\phi_{js} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } s \in P_j, \\ 0 \text{ nếu } s \notin P_j. \end{cases}$$

Khi đó, $\phi = \{\phi_{js}\}, j = 1, \ldots, l, s = 1, \ldots, m$, được gọi là ma trận chỉ định đầu/cuối-đường đi. Các véctơ dòng đường thỏa mãn nhu cầu được gọi là các véctơ dòng đường chấp nhận được, khi đó tập ràng buộc cho dòng cân bằng H là

$$K(H) := \{F \in A : \phi F = \rho(H)\}.$$

Tương tự như các kết quả cổ điển của M. J. Smith [71], trong [35] đã thiết lập quan hệ tương đương sau đây.

Bổ đề 2.5.2. *Véctơ dòng đường $H \in K(H)$ là dòng cân bằng nếu và chỉ nếu nó là nghiệm của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân sau*

QVI(T, K) *tìm $H \in K(H)$ sao cho tồn tại $t \in T(H)$ thỏa mãn* $\forall F \in K(H)$,

$$\langle t, F - H \rangle \geq 0.$$

Ta ký hiệu mạng giao thông là TNP(T, ρ), tập các dòng cân bằng của nó là $\mathcal{T}$, và tập nghiệm của QVI(T, K) là $\mathcal{Q}$.

Ví dụ sau đây minh họa trường hợp mạng giao thông có duy nhất dòng cân bằng. Hơn nữa, ví dụ này sẽ được sử dụng để minh họa các kết quả khác trong Chương 4.

Ví dụ 2.5.3. Xét mạng giao thông (xem Hình 2.1) gồm 4 nút $\{1,2,3,4\}$, bốn cung $\{(\overrightarrow{12}),(\overrightarrow{23}),(\overrightarrow{13}),(\overrightarrow{14})\}$ và hai cặp đầu/cuối $W_1=(1,3), W_2=(1,4)$. Cặp đầu/cuối $W_j, j=1,2$, được nối bởi tập gồm các đường P_j, trong đó $P_1=\{s_1=(123), s_2=(13)\}, P_2=\{s_3=(14)\}$. Do đó, $r_1=2, r_2=1, m=r_1+r_2=3$, và

$$\phi_{2\times 3}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

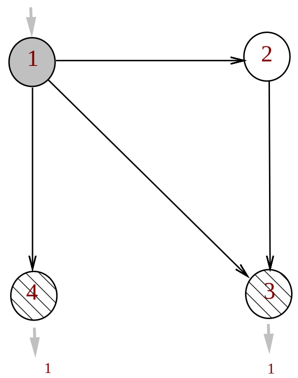
Xét tải năng trên các đường $\gamma_s=1, s=1,2,3$. Ta có

$$A=\{F\in\mathbb{B}^3 : 0\le F_s\le 1, s=1,2,3\}.$$

Giả sử rằng $T_s(F)=\{F_s\}$, với $s=1,2,3$ khi đó $T(F)=\{F\}$. Giả sử hơn nữa nhu cầu là $\rho(H)=(\rho_1(H),\rho_2(H))=(1,1)$. Khi đó, với mọi H, ta có

$$K(H)=\{F\in A:\phi F=\rho(H)\}=\{(F_1,F_2,F_3)\in\mathbb{B}^3_+ : F_1+F_2=1, F_3=1\}$$

vì tập này không phụ thuộc vào dòng H nên được ký hiệu lại là K.



Hình 2.1: Mạng giao thông

Từ định nghĩa ta có $\bar{H}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ là dòng cân bằng của TNP(T,ρ). Hơn nữa, $\bar{H}$ là nghiệm của QVI(T,K) vì với mọi $F\in K, \langle t, F-\bar{H}\rangle=0$. Tiếp theo, ta cần chứng minh $\bar{H}$ là nghiệm duy nhất của QVI(T,K). Xét $H\in K\setminus\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\}$. Khi đó, $H=(\frac{1}{2}+\epsilon,\frac{1}{2}-\epsilon,1)$ hoặc $H=(\frac{1}{2}-\epsilon,\frac{1}{2}+\epsilon,1)$ với $\epsilon\in(0,\frac{1}{2}]$.

Với $H = (\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} - \epsilon, 1)$, ta có, với mọi $F \in K$,

$$\begin{aligned}\langle t, F - H\rangle &= \langle (\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} - \epsilon, 1), (F_1, F_2, F_3) - (\frac{1}{2} + \epsilon, \frac{1}{2} - \epsilon, 1)\rangle \\ &= (\frac{1}{2} + \epsilon)F_1 - (\frac{1}{2} + \epsilon)^2 + (\frac{1}{2} - \epsilon)F_2 - (\frac{1}{2} - \epsilon)^2 + F_3 - 1 \\ &= \epsilon F_1 - \epsilon F_2 - 2\epsilon^2 = -\epsilon(F_2 - F_1 + 2\epsilon).\end{aligned}$$

Chọn $F = (0, 1, 1) \in K$ ta có

$$\langle t, F - H\rangle = -\epsilon(1 - 0 + 2\epsilon) = -\epsilon(1 + 2\epsilon) < 0,$$

nghĩa là, H không là nghiệm của QVI(T, K).

Với $H = (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon, 1)$, ta có, với mọi $F \in K$,

$$\begin{aligned}\langle t, F - H\rangle &= \langle (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon, 1), (F_1, F_2, F_3) - (\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon, 1)\rangle \\ &= (\frac{1}{2} - \epsilon)F_1 - (\frac{1}{2} - \epsilon)^2 + (\frac{1}{2} + \epsilon)F_2 - (\frac{1}{2} + \epsilon)^2 + F_3 - 1 \\ &= -\epsilon F_1 + \epsilon F_2 - 2\epsilon^2 = -\epsilon(F_1 - F_2 + 2\epsilon).\end{aligned}$$

Chọn $F = (1, 0, 1) \in K$, ta thấy

$$\langle t, F - H\rangle = -\epsilon(1 - 0 + 2\epsilon) = -\epsilon(1 + 2\epsilon) < 0,$$

nghĩa là H cũng không là nghiệm QVI(T, K). Do đó, $\bar{H}$ là dòng cân bằng duy nhất của TNP(T, ρ).

Để chứng minh kết quả chính trong mục này chúng ta xét một số tính chất của tập nghiệm $U(t)$ của hệ tuyến tính tham số sau đây

$$\langle a_i(t), x_i\rangle \leq b_i(t), i \in I,$$

ở đó tập chỉ số I hữu hạn, V là không gian mêtric, và $a_i : V \to (\mathbb{B}^m)^*$ và $b_i : V \to \mathbb{R}$ là liên tục.

Với $(t, x) \in V \times \mathbb{B}^m$, ta xét hàm số sau

$$g(t, x) = \max_{i \in I}(\langle a_i(t), x\rangle + b_i(t)).$$

Hằng số Hoffman của hệ tuyến tính trên là

$$\alpha_g(t) := \inf_{x \notin U(t)} \frac{g(t, x)}{d(x, U(t))}.$$

Bổ đề 2.5.4. (a) *([9], Định lý 3.1) Giả sử rằng với mỗi bộ chỉ số $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, m\}$, ma trận được xác định bởi các hàm $\{a_i(t)\}_{i=i_1,\ldots,i_k}$ có hạng hằng trong lân cận của t_0, và $t^\nu \to t_0$. Khi đó, $U(t^\nu) \xrightarrow{P-K} U(t_0)$.*

(b) *([34], Mệnh đề 4.6) Giả sử $\mathbb{B}^m$ là không gian Euclide, tồn tại ít nhất một dòng a_i khác véctơ 0 và a_i không phụ thuộc vào biến t với mọi i. Khi đó, với mỗi $t \in V$ sao cho $U(t) \neq \emptyset$, ta có*

$$\alpha_g(t) \geq \min_{E \subseteq I} \min\{\| \sum_{i \in E} \lambda_i a_i \| | \ 0 \leq \lambda_i, \sum_{i \in E} \lambda_i = 1\} > 0.$$

Hơn nữa, nếu $U(t) \neq \emptyset$ với t gần t_0 thì

$$\liminf_{t \to t_0} \alpha_g(t) \geq \min_{E \subseteq I} \min\{\| \sum_{i \in E} \lambda_i a_i \| | \ 0 \leq \lambda_i, \sum_{i \in E} \lambda_i = 1\} > 0.$$

(c) *([34], Định lý 5.2) Giả sử các điều kiện sau đây thỏa*

(c$_1$) *với mỗi $i \in I$, b_i là hàm Lipschitz trong lân cận của t_0 với cùng hằng Lipschitz k;*

(c$_2$) *tồn tại $\gamma > 0$ sao cho $\liminf_{t \to t_0} \alpha_g(t) > \frac{1}{\gamma}$;*

khi đó, với mọi t, t' trong lân cận của t_0 và mọi $r > 0$,

$$U(t') \cap \bar{B}(0, r) \subseteq U(t) + \bar{B}(0, k\gamma(r+1)d_T(t, t')).$$

Giả sử rằng $\mathbb{B}^m$, không gian các véctơ dòng đường, là không gian Euclide. Trong bổ đề sau, ta xét $g(H, F)$ và $\alpha_g(H)$ được định nghĩa tương ứng với K và A cho TNP(T, ρ) như là trường hợp đặc biệt của $g(t, x)$ và $\alpha_g(t)$.

Bổ đề 2.5.5. (a) *Giả sử rằng ρ^ν là các hàm liên tục và hội tụ liên tục đến ρ trên A. Khi đó, K^ν hội tụ liên tục đến K trên A, trong đó*

$$K^\nu(H) := \{F \in A | \ \phi F = \rho^\nu(H)\} \text{ và } K(H) := \{F \in A | \ \phi F = \rho(H)\}.$$

Hơn nữa, K^ν hội tụ graph đến K và K liên tục trên A.

(b) *Nếu tồn tại $\bar{H} \in A$ sao cho các hàm ρ^ν là Lipschitz trong lân cận của $\bar{H}$ với cùng hằng số Lipschitz $k > 0$, khi đó K^ν là Lipschitz trên A với cùng hằng số Lipschitz.*

Chứng minh. (a) Với $H \in A$ cố định, vì ρ^ν hội tụ liên tục đến ρ trên A, và ϕ là ma trận đầu/cuối-đường đi cố định, áp dụng Bổ đề 2.5.4(a), ta có $K^\nu(H^\nu)$ hội tụ Painlevé-Kuratowski đến $K(H)$ với mọi $H^\nu \to H$. Suy ra $K^\nu(H^\nu)$ hội tụ liên tục đến $K(H)$.

Do hội tụ liên tục kéo theo hội tụ graph, suy ra K^ν hội tụ graph đến K. Hơn nữa, vì ρ là hàm liên tục trên A nên K liên tục trên A.

(b) Giả sử rằng ρ^ν là Lipschitz trong lân cận nào đó của $\bar{H}$ với cùng hằng số $k > 0$. Đặt $\gamma := \max_s\{\gamma_s\}$ và chọn $\bar{\beta}$ thỏa điều kiện $\bar{\beta} > (\liminf_{H\to\bar{H}}\alpha_g(H))^{-1}$. Vì ma trận đầu/cuối-đường đi ϕ không phụ thuộc vào $\bar{H}$ nên $\alpha_g(H)$ có cùng chặn dưới là $\bar{\alpha} > 0$ với mọi $H \in A$. Do đó, $\liminf_{H\to\bar{H}} \alpha_g(H) \geq \bar{\alpha} > 0$ suy ra $0 < (\liminf_{H\to\bar{H}} \alpha_g(H))^{-1} \leq \frac{1}{\bar{\alpha}}$. Vậy, $\bar{\beta} > 0$. Áp dụng Bổ đề 2.5.4(c), với mọi H_1 và H_2 thuộc lân cận nào đó của $\bar{H}$,

$$K^\nu(H_1) = K^\nu(H_1) \cap \bar{B}(0, \gamma\sqrt{\gamma}) \subseteq K^\nu(H_2) + \bar{B}(0, k\bar{\beta}(\gamma\sqrt{\gamma}+1)\|H_1 - H_2\|),$$

nghĩa là $L_k = k\bar{\beta}(\gamma\sqrt{\gamma}+1)$ là hằng Lipschitz chung của K^ν (với mọi ν) trong lân cận $U_{\bar{H}}$ của $\bar{H}$. Hơn nữa, L_k không phụ thuộc vào $\bar{H}$. Ta có K^ν là Lipschitz địa phương trên A với hằng số chung L_k.

Tiếp theo, ta chứng minh K^ν là Lipschitz trên tập compắc A với hằng số chung L. Thật vậy, với mỗi $H \in A$, có một cận U_H của H sao cho K^ν là Lipschitz địa phương trên U_H với hằng số Lipschitz L_k. Vì A compắc nên tồn tại một phủ mở hữu hạn của phủ mở $\mathcal{C} := \{U_H |\ H \in A\}$:

$$C := \{U_{H_1}, \dots, U_{H_h}\}$$

sao cho K^ν là Lipschitz trên mỗi lân cận U_{H_i}, $i \in \{1, \dots, h\}$, với cùng hằng số L_k.

Khi đó, với mỗi $H, H' \in A$, tồn tại $h-1$ phần tử $H_1, H_2, \dots, H_{h-1}$ sao cho

$$K^\nu(H) \subseteq K^\nu(H_1) + B(0, L_k\|H - H_1\|)$$

$$K^\nu(H_1) \subseteq K^\nu(H_2) + B(0, L_k\|H_1 - H_2\|)$$

$$\dots$$

$$K^\nu(H') \subseteq K^\nu(H_{h-1}) + B(0, L_k\|H' - H_{h-1}\|).$$

Suy ra,

$$K^\nu(H) \subseteq K^\nu(H') + B(0, (h-1)L_k\|H - H'\|).$$

Vậy, K^ν là Lipschitz trên A với cùng hằng số $L := (h-1)k\bar{\beta}(\gamma\sqrt{\gamma}+1)$. □

Từ các kết quả trên, ta có thể thiết lập các xấp xỉ cho mạng giao thông khi T^ν hội tụ graph đến T và ρ^ν hội tụ liên tục đến ρ. Với mỗi $\nu \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\mathcal{T}^\nu$ là tập các dòng cân bằng của TNP(T^ν, ρ^ν).

Định lý 2.5.6. *Giả sử rằng*

(i) T^ν *có giá trị lồi compắc, có đồ thị bị chặn phần cuối và hội tụ graph đến* T;

(ii) ρ^ν *hội tụ liên tục đến* ρ *trên* A *và tồn tại* $\bar{H} \in A$ *sao cho* ρ^ν *là Lipschitz địa phương tại* $\bar{H}$ *với cùng hằng số Lipschitz* k *sao cho* $k < \frac{1}{\hat{\alpha}(\gamma\sqrt{\gamma}+1)(h-1)}$ *với mọi* $h > 1$, *ở đó*

$$\hat{\alpha} := \min_{E \subseteq J} \min\{\|\sum_{j\in E} \lambda_j \phi_j\| \mid 0 \le \lambda_j, \sum_{j \in E} \lambda_j = 1\} \quad \text{và } \gamma = \max_s\{\gamma_s\};$$

(iii) K^ν *là lồi với mọi* ν, $\mathrm{dom}K \subseteq \mathrm{dom}T$ *và* $\mathrm{dom}K^\nu \subseteq \mathrm{dom}T^\nu$ *với* ν *đủ lớn.*

Khi đó, $\mathcal{T}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{T}$.

Chứng minh. Ta cần kiểm tra các giả thiết của Định lý 2.2.5. Theo Bổ đề 2.5.4(b), $\hat{\alpha} > 0$. Vì ρ^ν là Lipschitz địa phương tại $\bar{H}$ với cùng hằng số Lipschitz $k < \frac{1}{\hat{\alpha}(\gamma\sqrt{\gamma}+1)(h-1)}$, áp dụng Bổ đề 2.5.5(b), ta có các ánh xạ K^ν là Lipschitz trên A với cùng hằng số $L = k\hat{\alpha}(\gamma\sqrt{\gamma}+1)(h-1) \in [0, 1)$. Từ tính chất hội tụ liên tục ρ^ν, ta có ρ liên tục. Rõ ràng K bị chặn. Áp dụng Bổ đề 2.5.5(a), K^ν hội tụ liên tục đến K trên A. Do đó, các giả thiết của Định lý 2.2.5 thỏa mãn. Áp dụng Bổ đề 2.5.2, ta có điều cần chứng minh. □

Định lý 3.1 của [69] là trường hợp đặc biệt của Định lý 2.5.6 khi các hàm giá của bài toán cân bằng giao thông là các hàm véctơ.

Kết luận

- Kết quả chính của Chương 2 gồm: định nghĩa về hội tụ lopside của song hàm có giá trị hữu hạn trên miền không chữ nhật (Định nghĩa 2.1.1), tính chất biến phân của hội tụ lopside cho các song hàm thuộc lớp fi-biv($\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n$) (Định lý 2.1.3), sự tương đương của các nghiệm của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và các điểm maxinf của song hàm tương ứng (Định lý 2.2.2), hội tụ Painlevé-Kuratowski của các tập nghiệm của dãy bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị xấp xỉ về tập nghiệm của bài toán gốc (Định lý 2.2.5), sự hội tụ của các điểm cân bằng Nash mở rộng (Định lý 2.3.2), sự hội tụ của các điểm cân bằng cạnh tranh Walras (Định lý 2.4.2) và sự hội tụ của các dòng cân bằng giao thông (Định lý 2.5.6).

- Hướng phát triển của Chương 2 là nghiên cứu tính xấp xỉ cho bài toán tối ưu hai mức được nghiên cứu trong [49] và tính xấp xỉ cho bất đẳng thức Ky Fan đa trị.

Chương 3

TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ TÍNH ĐẶT CHỈNH LEVITIN-POLYAK CỦA TRÒ CHƠI ĐA MỤC TIÊU MỞ RỘNG CÓ THAM SỐ

Chương này thiết lập các điều kiện đủ cho tính ổn định nghiệm, điều kiện đủ và điều kiện cần và đủ cho tính đặt chỉnh Levitin-Polyak của trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số.

Mục 3.1 phát biểu trò chơi đa mục tiêu mở rộng là dạng mở rộng bài toán cân bằng Nash mở rộng được xét ở Mục 2.3 của Chương 2 khi các hàm mục tiêu là các hàm véctơ. Mục 3.2 trình bày tính nửa liên tục dưới cho tập nghiệm xấp xỉ của trò chơi đa mục tiêu mở rộng trong không gian véctơ tôpô. Mục 3.3 thiết lập điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh Levitin-Polyak của trò chơi đa mục tiêu mở rộng. Khi không gian nền và không gian tham số là các không gian mêtric, điều kiện cần và đủ cho tính đặt chỉnh Levitin-Polyak dựa trên các độ đo không compắc theo nghĩa Kuratowski, Hausdorff hoặc Istrătescu được thiết lập.

Chương 3 được viết trên cơ sở bài báo [KLS2]. Các kết quả chính được trình bày ở đây mở rộng các kết quả tương ứng trong [70] về tính ổn định nghiệm của trò chơi đa mục tiêu mở rộng.

3.1 Trò chơi đa mục tiêu mở rộng

Cho I là tập đếm được, Với mỗi $i \in I$, X^i là tập con của không gian véctơ tôpô Hausdorff E^i. Đặt $X := \prod_{i \in I} X^i, X^{\hat{i}} := \prod_{j \in I, j \neq i} X^j$. Với $x \in X$, ta ký hiệu $x := (x_i, x_{\hat{i}})$ với x_i và $x_{\hat{i}}$ lần lượt là phép chiếu của x lên X^i và $X^{\hat{i}}$. Xét $f_i : X \to Y^i$ là hàm giá véctơ của người chơi thứ i trong đó Y^i là không gian véctơ tôpô Hausdorff được sắp thứ tự bộ phận bởi một nón lồi đóng nhọn với phần trong khác rỗng $C_i \subseteq Y^i$. Vì các chiến thuật của người chơi i phụ thuộc vào chiến thuật của những người chơi khác nên ta có ánh xạ đa trị $G_i : X^{\hat{i}} \rightrightarrows X^i$. Trò chơi đa mục tiêu mở rộng, với các ánh xạ và các tập như trên, được ký hiệu là MGG(f, G) trong đó $f := \prod_{i \in I} f_i$ và $G := \prod_{i \in I} G_i$.

Trước tiên, ta nhắc lại khái niệm về cân bằng Pareto-Nash yếu của MGG(f, G).

Định nghĩa 3.1.1. *Véctơ chiến thuật $\bar{x} := (\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \in X$ được gọi là cân bằng Pareto-Nash yếu của* MGG(f, G) *nếu, với mọi $i \in I$, $\bar{x}_i \in G_i(\bar{x}_{\hat{i}})$, và $y_i \in G_i(\bar{x}_{\hat{i}})$,*

$$f_i(y_i, \bar{x}_{\hat{i}}) - f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \notin \mathrm{int} C_i.$$

Ký hiệu $\mathcal{M}$ là tập nghiệm của trò chơi, nghĩa là tập các dòng cân bằng Pareto-Nash yếu của MGG(f, G).

Tập A trong không gian véctơ tôpô được gọi là tập cân nếu $tA \subseteq A$ với mỗi số thực $|t| \leq 1$. Với mỗi $i \in I$, cho $B^o{}_{E^i}$ và B_i^o lần lượt là các lân cận mở cân tại gốc của E^i và Y^i. Cho B_{E^i} và B_i lần lượt là bao đóng của $B^o{}_{E^i}$ và B_i^o. Đặt $C_i^c := Y^i \setminus \mathrm{int} C_i$. Chúng ta đưa ra khái niệm mới về nghiệm xấp xỉ của MGG(f, G) như sau.

Định nghĩa 3.1.2. *Với $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \in \mathbb{R}^3_+$, véctơ chiến thuật $\bar{x} := (\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \in X$ được gọi là cân bằng Pareto-Nash yếu xấp xỉ của* MGG(f, G) *nếu, với mọi $i \in I, \bar{x}_i \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}) + \epsilon_1 B_{E^i})$ và, với mọi $y_i \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}) + \epsilon_2 B_{E^i})$,*

$$f_i(y_i, \bar{x}_{\hat{i}}) - f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \in \epsilon_3 B_i + C_i^c.$$

Nhận xét 3.1.3. (i) Nhiều tác giả xét cân bằng Nash cho các trường hợp vô hướng hoặc đa mục tiêu, mở rộng hoặc không mở rộng theo nghĩa cực tiểu cho hàm mục tiêu thay vì cực đại như định nghĩa trên. Vì việc chuyển đổi giữa các khái niệm này được thực hiện trực tiếp nên khi so sánh các kết quả giữa các bài báo chúng tôi chỉ rõ cực tiểu hay cực đại khi cần thiết.

(ii) Định nghĩa về điểm cân bằng Nash xấp xỉ của bài toán cân bằng Nash vô hướng trên không gian tôpô với hai người chơi được xét bởi L. Pusillo Chicco [65] là trường hợp đặc biệt của Định nghĩa 3.1.2 khi $Y^1, Y^2 = \mathbb{R}$ và $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$. Tương tự, J. Morgan và R. Raucci [56] xét định nghĩa cân bằng Nash xấp xỉ nhưng theo nghĩa cực tiểu cho trò chơi mở rộng. P. G. Georgiev và P. M. Pardalos [19] xét điểm cân bằng Nash xấp xỉ (với $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 0$) trong không gian Banach. Trong [64], định nghĩa cân bằng Pareto-Nash yếu xấp xỉ là trường hợp riêng của Định nghĩa 3.1.2 của trò chơi đa mục tiêu mở rộng trên không gian mêtric trong đó I là tập đếm được, Y^i là không gian véctơ tôpô, $\epsilon_1 = \epsilon_3$, $\epsilon_2 = 0$, và B_i được thay bởi phần tử e_i của $\mathrm{int}C_i$.

Trong chương này, chúng ta xét Định nghĩa 3.1.2 trong trường hợp đặc biệt với $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 := \epsilon \geq 0$. Khi đó, tập nghiệm xấp xỉ có dạng

$$\mathcal{M}(\epsilon) := \{\bar{x} \in X \,|\, \forall i \in I, \bar{x}_i \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}) + \epsilon B_{E^i}) \text{ và}, \forall y_i \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}) + \epsilon B_{E^i}),$$
$$f_i(y_i, \bar{x}_{\hat{i}}) - f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \in \epsilon B_i + C_i^c\}. \tag{3.1}$$

Hiển nhiên là $\mathcal{M} = \mathcal{M}(0)$ và $\mathcal{M}(\epsilon)$ là dạng xấp xỉ của $\mathcal{M}$. Lưu ý điều kiện xấp xỉ cho hàm mục tiêu được dùng trong [64] như sau

$$f_i(y_i, \bar{x}_{\hat{i}}) - f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \in \epsilon e_i + C_i^c \tag{3.2}$$

với $e_i \in \mathrm{int}C_i \cap B_i$ cho trước (thay vì $\epsilon B_i + C_i^c$ như trong vế phải của (3.1)). Chúng ta sẽ chỉ rõ mối quan hệ giữa tập nghiệm $\mathcal{M}(\epsilon)$ thỏa (3.1) với tập nghiệm xấp xỉ thỏa (3.2) với tập ràng buộc xấp xỉ được cho bởi công thức

$$\hat{\mathcal{M}}(\epsilon) := \{\bar{x} \in X \,|\, \forall i \in I, \bar{x}_i \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}) + \epsilon B_{E^i}) \text{ và}, \forall y_i \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}) + \epsilon B_{E^i}),$$
$$f_i(y_i, \bar{x}_{\hat{i}}) - f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \in \epsilon e_i + C_i^c\}.$$

Rõ ràng rằng $\hat{\mathcal{M}}(\epsilon) \subseteq \mathcal{M}(\epsilon)$ với mọi $\epsilon \geq 0$. Trong ví dụ sau chúng ta sẽ tính cụ thể tập nghiệm chính xác $\mathcal{M}$ và chứng tỏ $\hat{\mathcal{M}}(\epsilon) \subseteq \mathcal{M}(\epsilon)$. Quan hệ này có thể xảy ra đẳng thức, tuy nhiên chiều ngược lại nói chung không đúng bởi vì nó có thể là bao hàm chặt.

Ví dụ 3.1.4. Cho $I = \{1, 2\}$, $X^i = E^i = Y^i = \mathbb{R}$, $G_i(x_{\hat{i}}) \equiv [-1, 0]$, $C_i^c = (-\infty, 0]$, $f_1(x_1, x_2) = x_1 x_2$, $f_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1$, và $B_{E^i} = B_i = [-1, 1]$ với $i \in I$.

• Đối với tập nghiệm chính xác, chúng ta có

$$\mathcal{M} = [-1, 0] \times \{0\}.$$

Thật vậy, chúng ta chỉ cần kiểm tra thành phần thứ 2 của $\mathcal{M}$. Điểm $\bar{x}_2 = 0$ thuộc tập này bởi vì, với mọi $\bar{x}_1, y_1, y_2 \in [-1, 0]$,

$$f_1(y_1, 0) - f_1(\bar{x}_1, 0) = 0 \text{ và } f_2(\bar{x}_1, y_2) - f_2(\bar{x}_1, 0) = y_2 \leq 0.$$

Các điểm $\bar{x}_2 < 0$ không thuộc tập này, bởi vì, với $y_2 = 0$, ta có

$$f_2(\bar{x}_1, y_2) - f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = y_2 - \bar{x}_2 > 0.$$

• Ta có thể thấy $\mathcal{M}(\frac{1}{n}) = \hat{\mathcal{M}}(\frac{1}{n})$ nếu $e_1 = e_2 = 1$ bởi vì $\frac{1}{n}e_i + C_i^c = (-\infty, \frac{1}{n}] = \frac{1}{n}B_i + C_i^c$ với $i = 1, 2$.

• Tiếp theo ta chứng minh, với $e_1 = e_2 = \frac{1}{2}$, $\hat{\mathcal{M}}(\frac{1}{n})$ chứa trong thực sự $\mathcal{M}(\frac{1}{n})$. Trước hết, ta có khẳng định sau

$$\mathcal{M}(\frac{1}{n}) \supseteq [-1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times \{0\} \cup [-1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times (0, \frac{1}{n}].$$

Thật vậy, tập đầu tiên trong vế phải của bao hàm thức trên chứa trong tập $\mathcal{M}(\frac{1}{n})$ bởi vì, với $i = 1, 2$, $X^i \cap (G_i(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n}B_{E^i}) = [-1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ và $\frac{1}{n}B_i + C_i^c = (-\infty, \frac{1}{n}]$ điều này kéo theo với $\bar{x}_2 = 0$ và, với mọi $\bar{x}_1, y_1, y_2 \in [-1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$,

$$f_1(y_1, 0) - f_1(\bar{x}_1, 0) = 0 \leq \frac{1}{n} \text{ và } f_2(\bar{x}_1, y_2) - f_2(\bar{x}_1, 0) = y_2 \leq \frac{1}{n}.$$

Tập thứ 2 trong vế phải của bao hàm thức trên chứa trong $\mathcal{M}(\frac{1}{n})$ bởi vì, với mỗi $\bar{x}_2 \in (0, \frac{1}{n}]$ và, với mọi $\bar{x}_1 \in [-1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$ và $y_1, y_2 \in [-1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$,

$$f_1(y_1, \bar{x}_2) - f_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \bar{x}_2(y_1 - \bar{x}_1) \leq \frac{1}{n} \text{ và } f_2(\bar{x}_1, y_2) - f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = y_2 - \bar{x}_2 \leq \frac{1}{n}.$$

Hơn nữa,

$$\hat{\mathcal{M}}(\frac{1}{n}) = \bigcup_{\gamma\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}]} [\frac{1}{n} - \frac{1}{2n\gamma}, \frac{1}{n}] \times \{\gamma\}.$$

Thật vậy, rõ ràng $\frac{1}{n}e_i + C_i^c = (-\infty, \frac{1}{2n}]$ với $i = 1, 2$. Mỗi phần tử $\gamma \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}]$ thuộc thành phần thứ hai của $\hat{\mathcal{M}}(\frac{1}{n})$ bởi vì, với mọi $\bar{x}_1 \in [\frac{1}{n} - \frac{1}{2n\gamma}, \frac{1}{n}]$ và $y_1, y_2 \in [-1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$,

$$f_1(y_1, \gamma) - f_1(\bar{x}_1, \gamma) = \gamma(y_1 - \bar{x}_1) \leq \frac{1}{2n} \text{ và } f_2(\bar{x}_1, y_2) - f_2(\bar{x}_1, \gamma) = y_2 - \gamma \leq \frac{1}{2n}.$$

Mặt khác, mỗi $\bar{x}_2 \in [-1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{2n})$ đều không thuộc thành phần thứ 2 của $\hat{\mathcal{M}}(\frac{1}{n})$, bởi vì, với $y_2 = \frac{1}{n}$, ta có

$$f_2(\bar{x}_1, y_2) - f_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = y_2 - \bar{x}_2 > \frac{1}{2n}.$$

Cuối cùng, bao hàm sau đây là chứa trong thực sự

$$\bigcup_{\gamma\in[\frac{1}{2n},\frac{1}{n}]} [\frac{1}{n} - \frac{1}{2n\gamma}, \frac{1}{n}] \times \{\gamma\} \subseteq [-1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times \{0\} \cup [-1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \times (0, \frac{1}{n}].$$

Suy ra $\mathcal{M}(\frac{1}{n})$ chứa thật sự $\hat{\mathcal{M}}(\frac{1}{n})$ trong trường hợp $e_1 = e_2 = \frac{1}{2}$.

Nhận xét 3.1.5. Để nghiên cứu tính ổn định và tính đặt chỉnh theo nghĩa Levitin-Polyak, chúng tôi xét tập nghiệm xấp xỉ $\mathcal{M}(\epsilon)$ được định nghĩa trong (3.1) với tập ràng buộc xấp xỉ. Dạng nghiệm xấp xỉ này một cách tự nhiên có những hạn chế đó là: tập nghiệm chính xác $\mathcal{M}$ có thể không chứa trong tập nghiệm xấp xỉ $\mathcal{M}(\epsilon)$ và $\mathcal{M}(\epsilon)$ có thể là tập rỗng thậm chí trong trường hợp bài toán có dữ liệu liên tục. Tuy nhiên, $\mathcal{M}(\epsilon)$ là xấp xỉ của $\mathcal{M}$ và $\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}$. Do đó, chúng tôi dùng kiểu xấp xỉ này để nghiên cứu dáng điệu của tập nghiệm khi lấy giới hạn của tập nghiệm xấp xỉ.

Tiếp theo, chúng ta giả sử rằng trò chơi đa mục tiêu mở rộng MGG(f, G) bị nhiễu bởi tham số λ thuộc không gian tôpô Hausdorff Λ. Khi đó, f_i và G_i trở thành $f_i : X \times \Lambda \to Y^i$ và $G_i : X^{\hat{i}} \times \Lambda \rightrightarrows X^i$. Ta gọi $\{\text{MGG}(f, G)_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ là họ các trò chơi đa mục tiêu mở rộng, hoặc trò chơi đa mục tiêu có tham số, để thuận tiện ta ký hiệu là họ $\{\text{MGG}(f, G)_\Lambda\}$, trong đó MGG$(f, G)_\lambda$ là trò chơi tương ứng với λ.

Với $\epsilon \geq 0$, họ $\{\text{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ có ánh xạ nghiệm xấp xỉ là $(\lambda, \epsilon) \mapsto \mathcal{M}(\lambda, \epsilon)$. Trong chương này, ta sử dụng thuật ngữ ánh xạ nghiệm nếu như không cần nhấn mạnh cân bằng Pareto-Nash yếu.

Về sự tồn tại nghiệm cho trò chơi, chúng ta có thể xem trong [10, 19, 50] và các tài liệu tham khảo trong đó. Ở đây, chúng tôi chỉ tập trung nghiên cứu về tính ổn định và tính đặt chỉnh nên luôn giả sử rằng các tập nghiệm và tập nghiệm xấp xỉ khác rỗng.

3.2 Tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm xấp xỉ

Trong mục này, chúng ta thiết lập tính nửa liên tục dưới cho ánh xạ nghiệm xấp xỉ của trò chơi đa mục tiêu mở rộng, vì tính nửa liên tục trên đã được xét khi nghiên cứu tính đặt chỉnh cho trò chơi trong Mục 3.3. Hơn nữa, bài toán không chỉ bị nhiễu bởi tham số λ như cách thông thường mà còn bị nhiễu bởi tham số xấp xỉ $\epsilon \geq 0$ khác. Do đó tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm xấp xỉ được thiết lập theo hai tham số. Lưu ý rằng, tính ổn định theo hai tham số nói trên liên quan chặt chẽ với tính đặt chỉnh Levitin-Polyak.

Như chúng ta đã biết, nghiên cứu tính nửa liên tục dưới thường phức tạp hơn tính nửa liên tục trên và tính nửa liên tục dưới cần các giả thiết mạnh hơn. Trong [56] có thí dụ trò chơi vô hướng mở rộng có tham số với dữ liệu thỏa các điều kiện tốt như compắc, lồi, liên tục nhưng ánh xạ nghiệm của bài toán này không nửa liên tục dưới. Để khắc phục điều này, chúng tôi xét nghiệm xấp xỉ thay cho nghiệm chính xác, tương tự nghiệm xấp xỉ được sử dụng trong [37, 57], cho trường hợp trò chơi có hữu hạn người chơi. Với $\lambda \in \Lambda$, $\epsilon \geq 0$, và $\delta > 0$ ta xét các tập nghiệm xấp xỉ sau đây:

$\mathcal{M}_\delta(\lambda, \epsilon) := \{x \in X | \ \forall i \in I, x_i \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}}, \lambda) + \epsilon B_{E^i})$, và, với mọi $y_i \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}}, \lambda) + \epsilon B_{E^i}), f_i(y_i, x_{\hat{i}}, \lambda) - f_i(x_i, x_{\hat{i}}, \lambda) \in (\delta + \epsilon) B_i + C_i^c\}$,

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\delta(\lambda,\epsilon) := \begin{cases} \mathcal{M}(\lambda,0) & \text{nếu } \epsilon = 0, \\ \mathcal{M}_\delta(\lambda,\epsilon) & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Định lý 3.2.1. *Giả sử rằng I là hữu hạn, X^i là compắc, $G_i(\cdot,\cdot)$ là liên tục và có giá trị đóng trên $X^{\hat{i}} \times \{\lambda^0\}$, và $f_i(\cdot,\cdot,\cdot)$ là liên tục trên $X^i \times X^{\hat{i}} \times \{\lambda^0\}$ với mọi $i \in I$. Khi đó, $\widetilde{\mathcal{M}}_\delta(\cdot,\cdot)$ là nửa liên tục dưới tại $(\lambda^0, 0)$ với $\delta > 0$.*

Chứng minh. Giả sử trái lại rằng $\exists \lambda^\alpha \to \lambda^0, \exists \epsilon^\alpha \to 0_+, \exists x_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\delta(\lambda^0,0) = \mathcal{M}(\lambda^0,0)$, $\forall x^\alpha \in \widetilde{\mathcal{M}}_\delta(\lambda^\alpha,\epsilon^\alpha)$, $x^\alpha \nrightarrow x^0$. Vì $G_i(\cdot,\cdot)$ nửa liên tục dưới tại $(x^0_{\hat{i}},\lambda^0)$, $G_i(\cdot,\cdot) + \cdot B_{E^i}$ nửa liên tục dưới tại $(x^0_{\hat{i}},\lambda^0,0)$ nên, với $x^0_i \in G_i(x^0_{\hat{i}},\lambda^0)$, $x^\alpha_{\hat{i}}$, λ^α, và ϵ^α đã xét ở trên, tồn tại lưới $\bar{x}^\alpha_i \in X^i \cap (G_i(x^\alpha_{\hat{i}},\lambda^\alpha) + \epsilon^\alpha B_{E^i})$ sao cho $\bar{x}^\alpha_i \to x^0_i$ và $(\bar{x}^\alpha_i, x^\alpha_{\hat{i}}) \to x_0$. Khi đó, $(\bar{x}^\alpha_i, x^\alpha_{\hat{i}}) \notin \widetilde{\mathcal{M}}_\delta(\lambda^\alpha,\epsilon^\alpha)$, nghĩa là, $\exists i_{0^\alpha} \in I$, $\exists y^\alpha_{i_{0^\alpha}} \in X^{i_{0^\alpha}} \cap (G_{i_{0^\alpha}}(x^\alpha_{\hat{i}_{0^\alpha}},\lambda^\alpha) + \epsilon^\alpha B_{E^{i_{0^\alpha}}})$ sao cho

$$f_{i_{0^\alpha}}(y^\alpha_{i_{0^\alpha}}, x^\alpha_{\hat{i}_{0^\alpha}}, \lambda^\alpha) - f_{i_{0^\alpha}}(\bar{x}^\alpha_{i_{0^\alpha}}, x^\alpha_{\hat{i}_{0^\alpha}}, \lambda^\alpha) \notin (\delta + \epsilon^\alpha) B_{i_{0^\alpha}} + C^c_{i_{0^\alpha}}.$$

Bởi vì I hữu hạn, sử dụng lưới con, ta có thể giả sử rằng $i_{0^\alpha} \equiv i_0$ với $i_0 \in I$ nào đó. Do đó, tồn tại $y^\alpha_{i_0} \in X^{i_0} \cap (G_{i_0}(x^\alpha_{\hat{i}_0},\lambda^\alpha) + \epsilon^\alpha B_{E^{i_0}})$ sao cho, với mọi α,

$$f_{i_0}(y^\alpha_{i_0}, x^\alpha_{\hat{i}_0}, \lambda^\alpha) - f_{i_0}(\bar{x}^\alpha_{i_0}, x^\alpha_{\hat{i}_0}, \lambda^\alpha) \notin (\delta + \epsilon^\alpha) B_{i_0} + C^c_{i_0}. \tag{3.3}$$

Vì X^{i_0} compắc nên ta có thể giả sử rằng $y^\alpha_{i_0} \to y_{i_0}$ thuộc X^{i_0}. Hơn nữa, vì $G_{i_0}(\cdot,\cdot) + \cdot B_{E^{i_0}}$ nửa liên tục trên tại $(x_{\hat{i}_0},\lambda^0,0)$ và X^{i_0} compắc nên $G_{i_0}(\cdot,\cdot) + \cdot B_{E^{i_0}}$ đóng. Do đó $y_{i_0} \in G_{i_0}(x_{\hat{i}_0},\lambda^0)$. Ta có khẳng định sau

$$f_{i_0}(y_{i_0}, x_{\hat{i}_0}, \lambda^0) - f_{i_0}(\bar{x}_{i_0}, x_{\hat{i}_0}, \lambda^0) \notin \operatorname{int}(\delta B_{i_0} + C^c_{i_0}). \tag{3.4}$$

Thật vậy, giả sử (3.4) không thỏa. Khi đó, tính chất liên tục của f_{i_0} dẫn đến, với α đủ lớn,

$$f_{i_0}(y^\alpha_{i_0}, x^\alpha_{\hat{i}_0}, \lambda^\alpha) - f_{i_0}(\bar{x}^\alpha_{i_0}, x^\alpha_{\hat{i}_0}, \lambda^\alpha) \in \operatorname{int}(\delta B_{i_0} + C^c_{i_0}) \subseteq (\delta + \epsilon^\alpha) B_{i_0} + C^c_{i_0},$$

là mâu thuẫn với (3.3).

Mặt khác, vì $x_0 \in \widetilde{\mathcal{M}}_\delta(\lambda^0,0)$ nên với mọi $i \in I, x^0_i \in G_i(x^0_{\hat{i}},\lambda^0)$ và với mọi $y_i \in G_i(x^0_{\hat{i}},\lambda^0)$,

$$f_i(y_i, x^0_{\hat{i}}, \lambda^0) - f_i(x^0_i, x^0_{\hat{i}}, \lambda^0) \in C^c_i \subseteq \operatorname{int}(\delta B_i + C^c_i),$$

mẫu thuẫn với (3.4). Thật vậy, với $k \in C_i^c$, ta cần chứng minh $k \in \operatorname{int}(\delta B_i + C_i^c)$. Bởi vì B_i^o là lân cận mở cân nên dễ dàng thấy rằng

$$k = 0 + k \in B_i^o + k = \operatorname{int}(B_i^o + k) \subseteq \operatorname{int}(B_i^o + C_i^c) \subseteq \operatorname{int}(B_i + C_i^c) \subseteq \operatorname{int}(\delta B_i + C_i^c).$$

Vậy, $\widetilde{\mathcal{M}}_\delta(\cdot,\cdot)$ nửa liên tục dưới tại $(\lambda^0, 0)$. □

Khi áp dụng kết quả trên cho trò chơi mở rộng vô hướng với hai người chơi, được nghiên cứu bởi J. Morgan và R. Raucci [56], Định lý 3.2.1 khác kết quả tương ứng về nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm xấp xỉ trong [56]. Cụ thể là, hai tác giả đã biến đổi trò chơi về bài toán cân bằng và xét tính chất nửa liên tục dưới của ánh xạ $(\lambda, \epsilon) \mapsto \mathcal{M}(\lambda, \epsilon)$, vì tính chất này mạnh hơn tính nửa liên tục dưới của ánh xạ $(\lambda, \epsilon) \mapsto \widetilde{\mathcal{M}}_\delta(\lambda, \epsilon)$ nên có thêm giả thiết tựa lồi.

3.3 Tính đặt chỉnh Levitin-Polyak của trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số

Mục này thiết lập tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số $\{\mathrm{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ với tập I đếm được.

Định nghĩa 3.3.1. *$\bar{x}^n$ được gọi là dãy xấp xỉ Pareto-Nash yếu tương ứng với dãy $\lambda^n \to \bar{\lambda}$ nếu $\exists \epsilon^n \to 0_+, \forall i \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \bar{x}_i^n \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}^n, \lambda^n) + \epsilon^n B_{E^i})$ và, với mọi $y_i \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}^n, \lambda^n) + \epsilon^n B_{E^i})$,*

$$f_i(y_i, \bar{x}_{\hat{i}}^n, \lambda^n) - f_i(\bar{x}_i^n, \bar{x}_{\hat{i}}^n, \lambda^n) \in \epsilon^n B_i + C_i^c.$$

Định nghĩa 3.3.2. $\mathrm{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ *được gọi là đặt chỉnh (Levitin-Polyak) (đặt chỉnh (Levitin-Polyak) duy nhất tương ứng) tại $\bar{\lambda}$ nếu*

(a) *tập nghiệm $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$ của $\mathrm{MGG}_{\bar{\lambda}}$ khác rỗng (duy nhất nghiệm tương ứng);*

(b) *với mỗi $\lambda^n \to \bar{\lambda}$, mỗi dãy xấp xỉ Pareto-Nash yếu tương ứng với λ^n có dãy con hội tụ đến một phần tử của $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$ (phần tử duy nhất của $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$ tương ứng).*

Lưu ý trong trường hợp bài toán không có tham số nhiễu, nghĩa là $\lambda^n \equiv \bar{\lambda}$ ta cũng có định nghĩa tương tự cho bài toán không tham số. Hơn nữa, Định nghĩa 3.4.1 về dãy xấp xỉ Pareto-Nash yếu là khác so với các định nghĩa trong [64, 65].

Tiếp theo để nghiên cứu tính đặt chỉnh cho trò chơi đa mục tiêu mở rộng, chúng tôi đề xuất tính đóng giảm nhẹ như sau.

Định nghĩa 3.3.3. *Cho U, V là các không gian tôpô Hausdorff, Z là không gian véctơ tôpô Hausdorff, $\boldsymbol{C} \subseteq Z$ là nón có phần trong khác rỗng, $b \geq 0$, và B là tập đóng và bị chặn trong Z. Ánh xạ $g : V \times U \to Z$ được gọi là **C**-tựa đóng dưới ((b-**C**)-tựa đóng dưới tương ứng) tại $(v, u) \in V \times U$ nếu, từ $\epsilon^\alpha \to 0_+$ ($\epsilon^\alpha \equiv b$ tương ứng), $(v^\alpha, u^\alpha) \to (v, u)$ trong $V \times U$ và $w^\alpha \to w$ với $w^\alpha, w \in V$, thỏa mãn điều kiện $g(v^\alpha, u^\alpha) - g(w^\alpha, u^\alpha) \in \epsilon^\alpha B + \boldsymbol{C}$ ($g(v^\alpha, u^\alpha) - g(w^\alpha, u^\alpha) \in bB + \boldsymbol{C}$ tương ứng) với mọi α, kéo theo $g(v, u) - g(w, u) \in \boldsymbol{C}$ ($g(v, u) - g(w, u) \in bB + \boldsymbol{C}$ tương ứng).*

Nếu ánh xạ g tựa đóng dưới tại mỗi điểm (v, u) thuộc tập A trong $V \times U$ thì g tựa đóng dưới trong A. Lưu ý rằng, trong trường hợp đặc biệt với $Z = \mathbb{R}$, $\mathbf{C} = (-\infty, 0]$, $B = [-1, 1]$, $b \geq 0$, và $\epsilon^\alpha \equiv b$, Định nghĩa 3.3.3 trở thành định nghĩa về tính b-đóng mức dưới tương ứng với một hàm cho trước được đề xuất trong [3]. Cụ thể là, $g(\cdot, \cdot)$ là (b-$(-\infty, 0]$)-tựa đóng dưới tại (v, u) (với $\epsilon^\alpha \equiv b$) nếu và chỉ nếu hàm $(\nu, \tau) \mapsto g(\nu, \tau)$ b-đóng mức dưới tương ứng với hàm $(\zeta, \tau) \mapsto -g(\zeta, \tau)$ tại $((v, u), (w, u))$ với mọi $w \in V$(nghĩa là nếu $(v^\alpha, u^\alpha) \to (v, u)$ và $w^\alpha \to w$ sao cho $g(v^\alpha, u^\alpha) - g(w^\alpha, u^\alpha) \leq b$ thì $g(v, u) - g(w, u) \leq b$). Từ định nghĩa ta thấy rằng tính chất **C**-tựa đóng dưới yếu hơn tính chất (0-**C**)-tựa đóng dưới. Hơn nữa, nếu $g(\cdot, \cdot)$ liên tục thì nó **C**-tựa đóng dưới, với nón **C** tùy ý. Tuy nhiên, chiều ngược lại nói chung không đúng, điều này được minh họa trong ví dụ sau.

Ví dụ 3.3.4. Cho $U = V = Z = \mathbb{R}$, $\mathbf{C} = (-\infty, 0]$, $B = [-1, 1]$, và $g(v, u) = v - u$ nếu $u \neq 0$ và $g(v, 0) = -1$. Để chứng tỏ g là **C**-tựa đóng dưới tại (v, u) bất kỳ, ta chỉ cần kiểm tra tại $u = 0$. Với mọi $\epsilon^n \to 0_+$, $(v^n, u^n) \to (v, 0)$, và $w^n \to w$ (với $v, w \in \mathbb{R}$ tùy ý) sao cho $g(v^n, u^n) - g(w^n, u^n) = v^n - w^n \in \epsilon^n B + \mathbf{C} = (-\infty, \epsilon^n]$, ta có $g(v, u) - g(w, u) = 0 \in (-\infty, 0]$. Do đó, g là **C**-tựa đóng dưới tại $(v, 0)$. Trong khi đó g không liên tục tại $(v, 0)$ khi $v \neq -1$. Hơn nữa, g cũng là (b-**C**)-tựa đóng dưới tại $(v,0)$ với mọi $b \geq 0$. Thật vậy, với mọi $(v^n,u^n) \to (v,0)$, và $w^n \to w$ (với $v,w \in \mathbb{R}$ tùy ý) sao cho $g(v^n,u^n) - g(w^n,u^n) = v^n - w^n \in bB + \mathbf{C} = (-\infty,b]$, ta có $g(v,u) - g(w,u) = 0 \in (-\infty,b]$.

Định lý 3.3.5. *Giả sử rằng X^i là compắc $G_i(\cdot,\cdot)$ là liên tục và có giá trị đóng trên $X^{\hat{i}} \times \{\bar{\lambda}\}$, và $f_i(\cdot,(\cdot,\cdot))$ là C_i^c-tựa đóng dưới trên $X^i \times (X^{\hat{i}} \times \{\bar{\lambda}\})$ với mọi $i \in I$. Khi đó, $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$ là đặt chỉnh tại $\bar{\lambda}$. Hơn nữa, nếu $\mathcal{M}(\bar{\lambda},0)$ là duy nhất nghiệm thì $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$ là đặt chỉnh duy nhất tại $\bar{\lambda}$.*

Chứng minh. Trước hết ta cần chứng minh $\mathcal{M}(\cdot,\cdot)$ là nửa liên tục trên tại $(\bar{\lambda},0)$. Giả sử có lân cận V của $\mathcal{M}(\bar{\lambda},0)$ và các dãy $\lambda^n \to \bar{\lambda}$, $\epsilon^n \to 0_+$, $x^n \in \mathcal{M}(\lambda^n,\epsilon^n)$ sao cho $x^n \notin V$ với mọi n. Vì $x^n \in \mathcal{M}(\lambda^n,\epsilon^n)$, với mọi $i \in I, n \in \mathbb{N}, x_i^n \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}}^n,\lambda^n) + \epsilon^n B_{E^i})$ và, với mọi $y_i^n \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}}^n,\lambda^n) + \epsilon^n B_{E^i})$, ta có

$$f_i(y_i^n,x_{\hat{i}}^n,\lambda^n) - f_i(x_i^n,x_{\hat{i}}^n,\lambda^n) \in \epsilon^n B_i + C_i^c. \tag{3.5}$$

Từ tính compắc của X, $x^n \to \bar{x} \in X$. Vì $G_i(\cdot,\cdot)$ là nửa liên tục trên tại $(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{\lambda})$ nên $G_i(\cdot,\cdot) + \cdot B_{E^i}$ là nửa liên tục trên tại $(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{\lambda},0)$. Do đó, $G_i(\cdot,\cdot) + \cdot B_{E^i}$ là đóng. Ta có $\bar{x}_i \in G_i(\bar{x}_{\hat{i}},\bar{\lambda})$. Giả sử $\bar{x} \notin \mathcal{M}(\bar{\lambda},0)$. Khi đó, tồn tại i_0 và $\bar{y}_{i_0} \in G_{i_0}(\bar{x}_{\hat{i}_0},\bar{\lambda})$ sao cho

$$f_{i_0}(\bar{y}_{i_0},\bar{x}_{\hat{i}_0},\bar{\lambda}) - f_{i_0}(\bar{x}_{i_0},\bar{x}_{\hat{i}_0},\bar{\lambda}) \notin C_{i_0}^c.$$

Áp dụng tính nửa liên tục dưới của $G_{i_0}(\cdot,\cdot)$ tại $(\bar{x}_{\hat{i}_0},\bar{\lambda})$, ta có $G_{i_0}(\cdot,\cdot) + \cdot B_{E^{i_0}}$ là nửa liên tục dưới tại $(\bar{x}_{\hat{i}_0},\bar{\lambda},0)$. Do đó, với $\bar{y}_{i_0}$ ở trên, tồn tại $y_{i_0}^n \in X^i \cap (G_{i_0}(\bar{x}_{\hat{i}_0}^n,\lambda^n) + \epsilon^n B_{E^{i_0}})$ sao cho $y_{i_0}^n \to \bar{y}_{i_0}$. Từ công thức (3.5), ta có

$$f_{i_0}(y_{i_0}^n,x_{\hat{i}_0}^n,\lambda^n) - f_{i_0}(x_{i_0}^n,x_{\hat{i}_0}^n,\lambda^n) \in \epsilon^n B_{i_0} + C_{i_0}^c.$$

Áp dụng tính $C_{i_0}^c$-tựa đóng dưới của f_{i_0}, khi lấy giới hạn ta được

$$f_{i_0}(\bar{y}_{i_0},\bar{x}_{\hat{i}_0},\bar{\lambda}) - f_{i_0}(\bar{x}_{i_0},\bar{x}_{\hat{i}_0},\bar{\lambda}) \in C_{i_0}^c,$$

là vô lý. Do đó, $\bar{x} \in \mathcal{M}(\bar{\lambda},0)$, điều này mâu thuẫn vì rằng $x^n \notin V$ với mọi n. Suy ra, $\mathcal{M}(\cdot,\cdot)$ nửa liên tục trên tại $(\bar{\lambda},0)$.

Tiếp theo, ta cần kiểm tra tính compắc của ánh xạ $\mathcal{M}(\bar{\lambda},0)$ bằng cách chứng minh tính đóng của nó. Cho $u^n \in \mathcal{M}(\bar{\lambda},0)$ và $u^n \to \bar{u}$. Khi đó, với mọi $i \in I$,

$u_i^n \in G_i(u_{\hat{i}}^n, \bar{\lambda})$, và với mọi $v_i^n \in G_i(u_{\hat{i}}^n, \bar{\lambda})$, ta có

$$f_i(v_i^n, u_{\hat{i}}^n, \bar{\lambda}) - f_i(u_i^n, u_{\hat{i}}^n, \bar{\lambda}) \in C_i^c. \tag{3.6}$$

Vì $G_i(\cdot, \bar{\lambda})$ là đóng, $\bar{u}_i \in G_i(\bar{u}_{\hat{i}}, \bar{\lambda})$. Nếu $\bar{u} \notin \mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$ thì tồn tại i_0 và $\bar{v}_{i_0} \in G_{i_0}(\bar{u}_{\hat{i}_0}, \bar{\lambda})$ sao cho

$$f_{i_0}(\bar{v}_{i_0}, \bar{u}_{\hat{i}_0}, \bar{\lambda}) - f_{i_0}(\bar{u}_{i_0}, \bar{u}_{\hat{i}_0}, \bar{\lambda}) \notin C_{i_0}^c.$$

Vì $G_{i_0}(\cdot, \cdot)$ là nửa liên tục dưới tại $(\bar{u}_{\hat{i}_0}, \bar{\lambda})$ nên tồn tại $v_{i_0}^n \in G_{i_0}(\bar{u}_{\hat{i}_0}^n, \lambda^n)$ sao cho $v_{i_0}^n \to \bar{v}_{i_0}$. Thế $v_{i_0}^n$ vào (3.6), ta có $f_{i_0}(v_{i_0}^n, u_{\hat{i}_0}^n, \bar{\lambda}) - f_{i_0}(u_{i_0}^n, u_{\hat{i}_0}^n, \bar{\lambda}) \in C_{i_0}^c$. Từ tính chất $C_{i_0}^c$-tựa đóng dưới của f_{i_0}, lấy giới hạn ta có

$$f_{i_0}(\bar{v}_{i_0}, \bar{u}_{\hat{i}_0}, \bar{\lambda}) - f_{i_0}(\bar{u}_{i_0}, \bar{u}_{\hat{i}_0}, \bar{\lambda}) \in C_{i_0}^c,$$

dẫn đến điều mâu thuẫn. Do đó, $\bar{u} \in \mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$ và $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$ là compắc. Áp dụng Định lý 1.3.11, ta có điều cần chứng minh. □

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng tính chất C_i^c-tựa đóng dưới trong Định lý 3.3.5 là cốt yếu.

Ví dụ 3.3.6. Với $i \in I = \{1, 2\}$, cho $X^i = [-1, 1]$, $E^i = \mathbb{R}, Y^i = \mathbb{R}^2, C_i = \mathbb{R}_+^2 B_{E^i} = [-1, 1], B_i = \{z \in \mathbb{R}^2 |\ \max |z_j| \leq 1, j = 1, 2\}$, $\Lambda = [0, 1]$, $G_1(x_2, \lambda) = G_2(x_1, \lambda) \equiv [0, 1]$, và $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}^2$ được xác định như sau

$$f_{1\,1}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{cases} \mathrm{x}_1 - x_2 & \text{nếu } \lambda = 0, \\ \mathrm{x}_2 - x_1 & \text{nếu } \lambda \neq 0, \end{cases} \qquad f_{1\,2}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{cases} \mathrm{x}_1 & \text{nếu } \lambda = 0, \\ \text{-}x_1 & \text{nếu } \lambda \neq 0, \end{cases}$$

$$f_{2\,1}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{cases} \mathrm{x}_2 - x_1 & \text{nếu } \lambda = 0, \\ \mathrm{x}_1 - x_2 & \text{nếu } \lambda \neq 0, \end{cases} \qquad f_{2\,2}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{cases} \mathrm{x}_2 & \text{nếu } \lambda = 0, \\ \text{-}x_2 & \text{nếu } \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Ta thấy $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (1, 1) \in \mathcal{M}(0, 0)$, vì, với mọi $y_1, y_2 \in [0, 1]$, ta có

$$f_{1\,1}(y_1, \bar{x}_2, 0) - f_{1\,1}(1, \bar{x}_2, 0) = y_1 - 1 \leq 0,$$

$$f_{1\,2}(y_1, \bar{x}_2, 0) - f_{1\,2}(1, \bar{x}_2, 0) = y_1 - 1 \leq 0,$$

$$f_{2\,1}(\bar{x}_1, y_2, 0) - f_{2\,1}(\bar{x}_1, 1, 0) = y_2 - 1 \leq 0,$$

$$f_{2\,2}(\bar{x}_1, y_2, 0) - f_{2\,2}(\bar{x}_1, 1, 0) = y_2 - 1 \leq 0.$$

Ta có khẳng định sau, với mọi $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in [-1,1]$ sao cho có ít nhất một thành phần của $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ nhỏ hơn 1, khi đó $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \notin \mathcal{M}(0,0)$. Thật vậy, nếu $\hat{x}_1 < 1$ thì có thể chọn $y_1 = 1$ sao cho

$$f_{1\,1}(y_1, \hat{x}_2, 0) - f_{1\,1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, 0) = 1 - \hat{x}_1 > 0,$$

$$f_{1\,2}(y_1, \hat{x}_2, 0) - f_{1\,2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, 0) = 1 - \hat{x}_1 > 0.$$

Trường hợp $\hat{x}_2 < 1$ ta cũng có đánh giá dương chặt tương tự như trên cho $f_{2\,1}$ và $f_{2\,2}$. Do đó, $\mathcal{M}(0,0) = \{(1,1)\}$.

Với $\lambda^n = \frac{1}{n}$ và $\epsilon^n = \frac{1}{n}$, ta có $X_1 \cap (G_1(\bar{x}_2, \lambda^n) + \epsilon^n B_{E^1}) = X_2 \cap (G_2(\bar{x}_1, \lambda^n) + \epsilon^n B_{E^2}) = [-\frac{1}{n}, 1]$. Khi đó $\mathcal{M}(\lambda^n, \epsilon^n) = [-\frac{1}{n}, 0] \times [-\frac{1}{n}, 0]$. Thật vậy, trước tiên ta chứng minh $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in [-\frac{1}{n}, 0] \times [-\frac{1}{n}, 0]$ thuộc tập $\mathcal{M}(\lambda^n, \epsilon^n)$. Với mọi $y_1, y_2 \in [-\frac{1}{n}, 1]$, ta có

$$\begin{aligned}
f_{1\,1}(y_1, \bar{x}_2, \lambda^n) - f_{1\,1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \lambda^n) &= \bar{x}_1 - y_1 \le \frac{1}{n},\\
f_{1\,2}(y_1, \bar{x}_2, \lambda^n) - f_{1\,2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \lambda^n) &= -y_1 + \bar{x}_1 \le \frac{1}{n},\\
f_{2\,1}(\bar{x}_1, y_2, \lambda^n) - f_{2\,1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \lambda^n) &= \bar{x}_2 - y_2 \le \frac{1}{n},\\
f_{2\,2}(\bar{x}_1, y_2, \lambda^n) - f_{2\,2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \lambda^n) &= -y_2 + \bar{x}_2 \le \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Do đó, $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \mathcal{M}(\lambda^n, \epsilon^n)$.

Mặt khác, mọi véctơ $(\hat{x}_1, \hat{x}_2) \in [-\frac{1}{n}, 1] \times [-\frac{1}{n}, 1]$, có ít nhất một trong hai thành phần của $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ dương thì không thuộc tập $\mathcal{M}(\lambda^n, \epsilon^n)$. Thật vậy, ta chỉ cần kiểm tra trường hợp $\hat{x}_1 > 0$. Chọn $y_1 = -\frac{1}{n}$, ta thấy

$$f_{1\,1}(y_1, \hat{x}_2, \lambda^n) - f_{1\,1}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda^n) = f_{1\,2}(y_1, \hat{x}_2, \lambda^n) - f_{1\,2}(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \lambda^n) = \hat{x}_1 + \frac{1}{n} > \frac{1}{n}.$$

Suy ra, $\mathcal{M}(\lambda^n, \epsilon^n) = [-\frac{1}{n}, 0] \times [-\frac{1}{n}, 0]$.

Rõ ràng, X^i là compắc, G_i là liên tục và có giá trị đóng. Tuy nhiên, $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$ không là đặt chỉnh tại $(0,0)$. Thật vậy, cho $(\lambda^n, \epsilon^n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$. Với mọi $x^n \in \mathcal{M}(\lambda^n, \epsilon^n)$, x^n không có dãy con nào hội tụ đến $(1,1) \in \mathcal{M}(0,0)$. Ta sẽ chứng minh f_i không phải là hàm C_i^c-tựa đóng dưới tại $(0,(0,0)) \in [-1,1] \times ([-1,1] \times \{0\})$. Thật vậy, cho $\epsilon^n = \frac{1}{n}, u^n = v^n \equiv 0$, $w^n = -1 + \frac{1}{n}$, và $\lambda^n = \frac{1}{n}$. Ta có

$$\begin{aligned}
f_{1\,1}(v^n, (u^n, \lambda^n)) - f_{1\,1}(w^n, (u^n, \lambda^n)) &= f_{1\,2}(v^n, (u^n, \lambda^n)) - f_{1\,2}(w^n, (u^n, \lambda^n))\\
&= -1 + \frac{1}{n} \le \frac{1}{n},
\end{aligned}$$

tuy nhiên

$$f_{1\,1}(0,(0,0)) - f_{1\,1}(-1,(0,0)) = f_{1\,2}(0,(0,0)) - f_{1\,2}(-1,(0,0)) = 1 > 0.$$

Kiểm tra tương tự cho f_2.

Nhận xét 3.3.7. Định lý 3.3.5 mở rộng Định lý 2 trong [70], vì không sử dụng giả thiết lồi cho X^i và G_i và giảm nhẹ tính liên tục của f_i (Lưu ý rằng Ví dụ 3.3.4 đã chỉ ra rằng tính tựa đóng dưới theo nón là yếu hơn tính liên tục).

Khi X^i là không gian mêtric với $i \in I$, giả thiết compắc trên X^i sẽ được loại bỏ. Lúc này, đường kính và độ đo không compắc của tập nghiệm xấp xỉ sẽ giữ vai trò quyết định. Tính đặt chỉnh sẽ phụ thuộc vào việc những đại lượng này có dần về 0 hay không. Trong phần còn lại của Chương 3, chúng ta xét Λ, X^i là các không gian mêtric.

Cho hai số dương ζ và ϵ, tập nghiệm xấp xỉ của họ $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$, khi tham số thay đổi xung quanh điểm đang xét $\bar{\lambda}$, được cho bởi công thức sau

$$\Pi(\bar{\lambda},\zeta,\epsilon) := \bigcup_{\lambda\in\bar{B}(\bar{\lambda},\zeta)} \mathcal{M}(\lambda,\epsilon).$$

Định nghĩa 3.3.8. *Cho M là tập con khác rỗng của không gian mêtric X và $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Độ đo không compắc Kuratowski của M là*

$$\mu(M) := \inf\{\epsilon > 0 \mid M \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} M_k \text{ và } \mathrm{diam} M_k \le \epsilon, k = 1,\dots,n\}.$$

(b) *Độ đo không compắc Hausdorff của M là*

$$\eta(M) := \inf\{\epsilon > 0 \mid M \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,\epsilon), x_k \in X\}.$$

(c) *Độ đo không compắc Istrătescu của M là*

$$\iota(M) := \inf\{\epsilon > 0 \mid M \text{ không có vô hạn các tập con } \epsilon\text{-tách}\}.$$

Mối quan hệ sau đây được chứng minh trong [11].

$$\eta(M) \le \iota(M) \le \mu(M) \le 2\eta(M). \tag{3.7}$$

Vì các độ đo μ, η và ι có những tính chất chung nên ta sử dụng $\mathbf{r}$ để biểu diễn chung ba độ đo này. Ta nhắc lại các tính chất của độ đo không compắc như sau:

(i) $\mathbf{r}(M) = 0$ nếu M là tập hoàn toàn bị chặn;

(ii) Nếu X là không gian đủ và A^n là dãy các tập con đóng của X sao cho $A^{n+1} \subseteq A^n$ với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và $\lim_n \mathbf{r}(A^n) = 0$, khi đó $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A^n$ là tập compắc khác rỗng và $\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(A^n, A) = 0$.

Định lý 3.3.9. *Xét* $\mathbf{r} \in \{\mu, \eta, \iota\}$.

(a) *Nếu* $\{\mathrm{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ *là đặt chỉnh tại* $(\bar\lambda, 0)$ *thì* $\mathbf{r}(\Pi(\bar\lambda, \zeta, \epsilon)) \to 0_+$ *khi* $(\zeta, \epsilon) \to (0_+, 0_+)$.

(b) *Ngược lại, nếu* X *là không gian mêtric đủ,* Λ *là compắc hoặc hữu hạn chiều và, với mọi* $i \in I$, *các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) G_i *là liên tục và có giá trị compắc trên* $X^{\hat{i}} \times \Lambda$,

(ii) f_i *là* $(b\text{-}C_i^c)$*-tựa đóng dưới trong* $X^i \times (X^{\hat{i}} \times \Lambda)$ *với mọi* $b > 0$,

khi đó $\{\mathrm{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ *là đặt chỉnh tại* $(\bar\lambda, 0)$, *nếu như* $\mathbf{r}(\Pi(\bar\lambda, \zeta, \epsilon)) \to 0_+$ *khi* $(\zeta, \epsilon) \to (0_+, 0_+)$.

Chứng minh. Từ mối quan hệ của ba độ đo trong (3.7), chúng ta chỉ cần xét trường hợp $\mathbf{r} = \eta$, các trường hợp còn lại được chứng minh tương tự.

(a) Giả sử $\{\mathrm{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ là đặt chỉnh tại $(\bar\lambda, 0)$. Vì với mọi số dương ζ, ϵ và $\mathcal{M}(\bar\lambda, 0) \subseteq \Pi(\bar\lambda, \zeta, \epsilon)$ nên ta có

$$\mathcal{H}(\Pi(\bar\lambda, \zeta, \epsilon), \mathcal{M}(\bar\lambda, 0)) = e(\Pi(\bar\lambda, \zeta, \epsilon), \mathcal{M}(\bar\lambda, 0)).$$

Cho x^n là một dãy tùy ý trong $\mathcal{M}(\bar\lambda, 0)$. Vì x^n cũng là dãy xấp xỉ Pareto-Nash yếu của $\{\mathrm{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ tương ứng với dãy các hằng số $\bar\lambda$, tồn tại một dãy con hội tụ đến một điểm thuộc $\mathcal{M}(\bar\lambda, 0)$. Do đó, $\mathcal{M}(\bar\lambda, 0)$ compắc. Nếu $\mathcal{M}(\bar\lambda, 0) \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(z^k, \epsilon)$ thì

$$\Pi(\bar\lambda, \zeta, \epsilon) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B\big(z^k, \epsilon + \mathcal{H}\big(\Pi(\bar\lambda, \zeta, \epsilon), \mathcal{M}(\bar\lambda, 0)\big)\big)$$

và do đó

$$\eta(\Pi(\bar\lambda, \zeta, \epsilon)) \le \mathcal{H}\big(\Pi(\bar\lambda, \zeta, \epsilon), \mathcal{M}(\bar\lambda, 0)) + \eta(\mathcal{M}(\bar\lambda, 0)\big).$$

Vì $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$ là compắc nên $\eta(\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)) = 0$. Suy ra,

$$\eta(\Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon)) \leq \mathcal{H}(\Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon), \mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)).$$

Ta có khẳng định $\mathcal{H}(\Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon), \mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)) \to 0_+$ khi $(\zeta, \epsilon) \to (0_+, 0_+)$. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng, tồn tại $\rho > 0$, $(\zeta^n, \epsilon^n) \to (0_+, 0_+)$ và $x^n \in \Pi(\bar{\lambda}, \zeta^n, \epsilon^n)$ sao cho, với mọi $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x^n, \mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)) \geq \rho.$$

Vì x^n là dãy xấp xỉ Pareto-Nash yếu của $\{\mathrm{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ nên tồn tại một dãy con hội tụ đến một điểm thuộc $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$ là mâu thuẫn.

(b) Giả sử $\eta(\Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon)) \to 0_+$ khi $(\zeta, \epsilon) \to (0_+, 0_+)$. Trước hết ta chứng minh $\Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon)$ là đóng với mọi số dương ζ và ϵ. Cho $x^n \in \Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon)$ và $x^n \to x$. Khi đó, với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại $\lambda^n \in B(\bar{\lambda}, \zeta)$ sao cho, với mọi $i \in I$ và $y_i^n \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}}^n, \lambda^n) + \epsilon B_{E^i})$,

$$f_i(y_i^n, x_{\hat{i}}^n, \lambda^n) - f_i(x_i^n, x_{\hat{i}}^n, \lambda^n) \in \epsilon B_i + C_i^c. \tag{3.8}$$

Vì $B(\bar{\lambda}, \zeta)$ là compắc nên ta có thể giả sử rằng $\lambda^n \to \lambda \in B(\bar{\lambda}, \zeta)$. Với mọi $i \in I$, vì $G_i(\cdot, \cdot)$ là nửa liên tục trên và có giá trị compắc trên $X^{\hat{i}} \times \Lambda$ nên $G_i(\cdot, \cdot) + \epsilon B_{E^i}$ đóng tại $(x_{\hat{i}}, \lambda)$. Suy ra, $x_i \in G_i(x_{\hat{i}}, \lambda) + \epsilon B_{E^i}$. Ta có khẳng định, với mọi $y_i \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}}, \lambda) + \epsilon B_{E^i})$,

$$f_i(y_i, x_{\hat{i}}, \lambda) - f_i(x_i, x_{\hat{i}}, \lambda) \in \epsilon B_i + C_i^c.$$

Thật vậy, giả sử tồn tại $i_0 \in I$ và $y_{i_0} \in X^{i_0} \cap (G_{i_0}(x_{\hat{i}_0}, \lambda) + \epsilon B_{E^{i_0}})$ sao cho

$$f_{i_0}(y_{i_0}, x_{\hat{i}_0}, \lambda) - f_{i_0}(x_{i_0}, x_{\hat{i}_0}, \lambda) \notin \epsilon B_{i_0} + C_{i_0}^c, \tag{3.9}$$

Vì $G_{i_0}(\cdot, \cdot)$ là nửa liên tục dưới tại $(x_{\hat{i}_0}, \lambda)$, tồn tại $y_{i_0}^n \in X^{i_0} \cap (G_{i_0}(x_{\hat{i}_0}^n, \lambda^n) + \epsilon B_{E^{i_0}})$ sao cho $y_{i_0}^n \to y_{i_0}$. Thế dãy này vào công thức (3.8), ta được

$$f_{i_0}(y_{i_0}^n, x_{\hat{i}_0}^n, \lambda^n) - f_{i_0}(x_{i_0}^n, x_{\hat{i}_0}^n, \lambda^n) \in \epsilon B_{i_0} + C_{i_0}^c.$$

Theo tính (ϵ-$C_{i_0}^c$)-tựa đóng dưới của f_{i_0} tại $(x_{i_0}, (x_{\hat{i}_0}, \lambda))$, sau khi lấy giới hạn ta có

$$f_{i_0}(y_{i_0}, x_{\hat{i}_0}, \lambda) - f_{i_0}(x_{i_0}, x_{\hat{i}_0}, \lambda) \in \epsilon B_{i_0} + C_{i_0}^c.$$

mâu thuẫn với (3.9). Vì $\lambda \in B(\bar{\lambda}, \zeta)$ nên ta có $x \in \Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon)$. Do đó, $\Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon)$ là đóng.

Tiếp theo, ta cần chứng minh $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0) = \bigcap_{\zeta>0,\epsilon>0} \Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon)$. Trước hết ta chỉ ra $\bigcap_{\zeta>0} \Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon) = \mathcal{M}(\bar{\lambda}, \epsilon)$. Thật vậy, dễ dàng thấy rằng $\bigcap_{\zeta>0} \Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon) \supseteq \mathcal{M}(\bar{\lambda}, \epsilon)$. Để chứng minh chiều ngược lại, cho $x \in \bigcap_{\zeta>0} \Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon)$. Khi đó tồn tại $\lambda^n \in B(\bar{\lambda}, \zeta)$ sao cho, với mọi $i \in I$ và $y_i^n \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}}, \lambda^n) + \epsilon B_{E^i})$,

$$f_i(y_i^n, x_{\hat{i}}, \lambda^n) - f_i(x_i, x_{\hat{i}}, \lambda^n) \in \epsilon B_i + C_i^c.$$

Vì $\lambda^n \to \bar{\lambda}$ và $G_i(\cdot, \cdot)$ là đóng, ta có $x \in G_i(x_{\hat{i}}, \bar{\lambda}) + \epsilon B_{E^i}$. Bây giờ ta sẽ chứng tỏ rằng $x \in \mathcal{M}(\bar{\lambda}, \epsilon)$. Thật vậy, với mỗi $y_i \in G_i(x_{\hat{i}}, \bar{\lambda}) + \epsilon B_{E^i}$, vì $G_i(\cdot, \cdot)$ là nửa liên tục dưới tại $(x_{\hat{i}}, \bar{\lambda})$, nên tồn tại $y_i^n \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}}, \lambda^n) + \epsilon B_{E^i})$ sao cho $y_i^n \to y_i$. Từ tính chất $(\epsilon\text{-}C_i^c)$-tựa đóng dưới của f_i, ta có

$$f_i(y_i, x_{\hat{i}}, \bar{\lambda}) - f_i(x_i, x_{\hat{i}}, \bar{\lambda}) \in \epsilon B_i + C_i^c.$$

nghĩa là $\bigcap_{\zeta>0} \Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon) \subseteq \mathcal{M}(\bar{\lambda}, \epsilon)$. Suy ra, $\bigcap_{\zeta>0} \Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon) = \mathcal{M}(\bar{\lambda}, \epsilon)$, và $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0) = \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{M}(\bar{\lambda}, \epsilon) = \bigcap_{\zeta>0,\epsilon>0} \Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon)$. Vì $\eta(\Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon)) \to 0_+$ khi $(\zeta, \epsilon) \to (0_+, 0_+)$, tính chất của độ đo không compắc η kéo theo $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$ compắc và $H(\Pi(\bar{\lambda}, \zeta, \epsilon), \mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)) \to 0_+ \quad \text{khi} \quad (\zeta, \epsilon) \to (0_+, 0_+)$.

Cho x^n là dãy xấp xỉ Pareto-Nash yếu của $\{\text{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ tương ứng với λ^n, trong đó $\lambda^n \to \bar{\lambda}$. Tồn tại $\epsilon^n \to 0_+$ sao cho, với mọi $y^n \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}}^n, \lambda^n) + \epsilon^n B_{E^i})$ và $n \in \mathbb{N}$,

$$f_i(y_i^n, x_{\hat{i}}^n, \lambda^n) - f_i(x_i^n, x_{\hat{i}}^n, \lambda^n) \in \epsilon^n B_i + C_i^c.$$

Điều này có nghĩa là $x^n \in \Pi(\bar{\lambda}, \zeta^n, \epsilon^n)$ với $\zeta^n := d(\bar{\lambda}, \lambda^n)$. Ta thấy rằng

$$d(x^n, \mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)) \leq H(\Pi(\bar{\lambda}, \zeta^n, \epsilon^n), \mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)) \to 0_+.$$

Do đó, tồn tại $\bar{x}^n \in \mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$ sao cho

$$d(x^n, \bar{x}^n) \to 0 \quad \text{khi} \quad n \to \infty.$$

Từ tính chất compắc của $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$, tồn tại một dãy con $\bar{x}^{n_k}$ của $\bar{x}^n$ hội tụ về một điểm $\bar{x}$ của $\mathcal{M}(\bar{\lambda}, 0)$. Suy ra, dãy con tương ứng x^{n_k} của x^n hội tụ về $\bar{x}$. Vậy $\{\text{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ là đặt chỉnh tại $(\bar{\lambda}, 0)$. $\square$

Kết luận

- Các kết quả chính của chương này gồm: định nghĩa về nghiệm xấp xỉ của trò chơi đa mục tiêu mở rộng (Định nghĩa 3.1.2), điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới cho tập nghiệm xấp xỉ yếu của trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số (Định lý 3.2.1), điều kiện đủ của tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho bài toán này (Định lý 3.3.5) và điều kiện cần và đủ của tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho bài toán này trong các không gian mêtric dựa vào các độ đo không compắc (Định lý 3.3.9).

- Hướng phát triển của Chương 3 là nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của trò chơi đa mục tiêu mở rộng bằng kỹ thuật vô hướng hóa.

Chương 4

CẬN SAI SỐ VÀ TÍNH ĐẶT CHỈNH CỦA MẠNG GIAO THÔNG

Chương này thiết lập các điều kiện đủ về tính duy nhất nghiệm, cận sai số và tính đặt chỉnh cho mạng giao thông.

Mục 4.1 sử dụng song hàm φ trong Mục 2.2 của Chương 2 để xây dựng hàm đánh giá cho bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và thiết lập các điều kiện đủ cho tính duy nhất nghiệm và các cận sai số của các dòng chấp nhận được của mạng giao thông. Mục 4.2 mở rộng khái niệm dòng cân bằng trong Mục 2.5 của Chương 2, trình bày các định nghĩa về nghiệm xấp xỉ của mạng giao thông và thiết lập mối quan hệ của chúng với nghiệm xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng. Mục 4.3 đưa ra các định nghĩa về tính đặt chỉnh và tính đặt chỉnh duy nhất cho mạng giao thông và cho bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng và thiết lập các điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh của hai bài toán này.

Chương này được viết trên cơ sở các bài báo [KLS1, KS2]. Các kết quả chính trình bày ở Mục 4.2 mở rộng một số kết quả tương ứng trong [35, 36] về mối quan hệ giữa mạng giao thông và bài toán tựa bất đẳng thức biến phân tương ứng, mở rộng một số kết quả tương ứng trong [1, 2] về tính nửa liên tục của ánh xạ nghiệm của mạng giao thông có tham số.

4.1 Tính duy nhất nghiệm và cận sai số của mạng giao thông

Mục này phát triển các kết quả trong [6] để thiết lập các điều kiện đủ cho tính duy nhất nghiệm và các cận sai số của các dòng chấp nhận được của mạng giao thông. Trước tiên, chúng ta nhắc lại định nghĩa về hàm đánh giá của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị.

Định nghĩa 4.1.1. *Hàm* $g : \mathrm{Fix}(K) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *được gọi là hàm đánh giá của* $\mathrm{QVI}(T, K)$ *nếu hai điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) $g(x) \geq 0$*, với mỗi* $x \in \mathrm{Fix}(K)$;

(ii) $g(x) = 0$ *và* $x \in \mathrm{Fix}(K)$ *nếu và chỉ nếu* x *là nghiệm của* $\mathrm{QVI}(T, K)$.

Xét hàm $f : \mathrm{Fix}(K) \to \mathbb{R}$ được cho bởi công thức sau

$$f(x) := -\inf_{y \in K(x)} \varphi(x, y),$$

với song hàm $\varphi :\ \mathrm{Fix}(K) \times K(x) \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi(x, y) := \sup_{t \in T(x)} \langle t, y - x\rangle + \langle P(y - x), y - x\rangle \qquad (4.1)$$

ở đó $P : \mathbb{B}^m \to (\mathbb{B}^m)^*$ là ánh xạ tuyến tính được biểu diễn bởi ma trận đối xứng xác định dương cũng được ký hiệu là P.

Các song hàm tương tự φ đã được xét trong [18] và [6] khi $\mathbb{B}^m$ là không gian Euclide, K là ánh xạ hằng và $\mathrm{Fix}(K)$ được thay thế bởi $\mathrm{dom}K$: trong [18] T là ánh xạ đơn trị và trong [6] $P = \beta \mathrm{I}$ với $\beta > 0$ và I là ma trận đơn vị.

Bổ đề sau chứng tỏ rằng f là hàm đánh giá của $\mathrm{QVI}(T, K)$.

Bổ đề 4.1.2. *Xét bài toán* $\mathrm{QVI}(T, K)$*, giả sử* $\mathrm{Fix}(K) \subseteq \mathrm{dom}T$ *và* K*,* T *có giá trị lồi đóng. Khi đó,* f *là hàm đánh giá của* $\mathrm{QVI}(T, K)$*;*

Chứng minh. Dễ dàng thấy rằng, với mỗi x thuộc $\mathrm{Fix}(K)$, $f(x) \geq -\varphi(x, x) = 0$. Mặt khác, từ Định lý 2.2.2(a) ta có x là nghiệm của $\mathrm{QVI}(T, K)$ nếu và chỉ nếu

$x \in \mathrm{Fix}(K)$ và x là điểm cực tiểu toàn cục của $\varphi(x, \cdot)$ trên $K(x)$, điều này tương đương với

$$x \in \mathrm{Fix}(K) \text{ và } f(x) = -\varphi(x, x) = 0.$$

□

Xét mạng giao thông trong Mục 2.4 của Chương 2. Chúng ta cần kết quả sau để xét cận sai số cho bài toán này.

Bổ đề 4.1.3. *Giả sử rằng, với mỗi số thực $\alpha > 0$, hàm nhu cầu ρ là Hölder calm với số mũ α tại $\bar{H} \in A$, nghĩa là, tồn tại số thực $k > 0$ sao cho*

$$\|\rho(H) - \rho(\bar{H})\| \leq k\|H - \bar{H}\|^{\alpha}, \forall H \in A,$$

khi đó K là Hölder calm với số mũ α tại $\bar{H}$, nghĩa là, tồn tại số thực $L > 0$ sao cho

$$K(H) \subseteq K(\bar{H}) + \bar{B}(0, L\|H - \bar{H}\|^{\alpha}), \forall H \in A.$$

Chứng minh. Trước tiên chúng ta cần phát biểu lại Bổ đề Hoffman như sau.

Cho $\mathcal{A}$ là ma trận có kích thước $l \times m$, d_1 và d_2 là hai véctơ trong $\mathbb{B}^l$. Giả sử K_i là tập nghiệm của hệ phương trình tuyến tính $\mathcal{A}F = d_i$, với $i = 1, 2$. Khi đó, tồn tại số $\theta > 0$ sao cho $K_1 \subseteq K_2 + \bar{B}(0, \theta\|d_1 - d_2\|)$.

Tiếp theo ta xét $\bar{H}, H \in A$. Áp dụng Bổ đề Hoffman, khi đó tồn tại $\theta > 0$ sao cho

$$K(H) \subseteq K(\bar{H}) + \bar{B}(0, \theta\|\rho(H) - \rho(\bar{H})\|).$$

Hơn nữa, tính Hölder calm của hàm ρ dẫn đến

$$K(H) \subseteq K(\bar{H}) + \bar{B}(0, L\|H - \bar{H}\|^{\alpha}),$$

với $L = \theta k$. Ta có điều cần chứng minh □

Các khái niệm về tính đơn điệu của ánh xạ đa trị và tính đối xứng của tập các điểm bất động được trình bày ở định nghĩa sau.

Định nghĩa 4.1.4. *Cho ánh xạ đa trị $G : \mathbb{B}^m \rightrightarrows \mathbb{B}^n$.*

(a) *Với $\mu > 0$, G được gọi là đơn điệu (đơn điệu mạnh với hệ số μ tương ứng) trên tập $C \subseteq \mathbb{B}^m$ nếu, với mọi $x, y \in C$ và $z_x \in G(x), z_y \in G(y)$, ta có*

$$\langle z_y - z_x, y - x\rangle \geq 0) \ (\langle z_y - z_x, y - x\rangle \geq \mu\|y - x\|^2 \text{ tương ứng}).$$

(b) *G được gọi là tập điểm bất động đối xứng, xem [6], nếu nó thỏa tính chất sau*

$$\forall x \in \mathrm{Fix}(G), \forall y \in G(x), \text{ ta có } x \in G(y).$$

Trong trường hợp $G(x) \equiv G$, là tập hằng, rõ ràng G là tập điểm bất động đối xứng.

Định lý 4.1.5. *Với dòng cân bằng $\bar{H} \in A$, giả sử rằng*

(i) *T có giá trị lồi compắc khác rỗng và đơn điệu mạnh với hệ số $\mu > 0$ trên $K(\bar{H})$;*

(ii) *$K(\bar{H})$ là tập lồi đóng và K là tập điểm bất động đối xứng;*

(iii) *P (được định nghĩa trong công thức (4.1)) thỏa điều kiện $\|P\| < \mu$;*

(iv) $\mathrm{Fix}(K) \subseteq \mathrm{dom}T$.

Khi đó, $\bar{H}$ là dòng cân bằng duy nhất trên $K(\bar{H})$ và, với mỗi $H \in K(\bar{H})$,

$$\|H - \bar{H}\| \leq \sqrt{\frac{f(H)}{\mu - \|P\|}}. \tag{4.2}$$

Chứng minh. Từ tính đối xứng của tập điểm bất động $\mathrm{Fix}(K)$, $\bar{H}$ là phần tử của $K(H)$ với mỗi $H \in K(\bar{H})$. Bởi vì các giả thiết của Bổ đề 4.1.3 thỏa mãn nên f là hàm đánh giá của $\mathrm{QVI}(T, K)$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f(H) &= \sup_{F \in K(H)} \{ \inf_{\tau \in T(H)} \langle \tau, H - F\rangle - \langle P(H - F), H - F\rangle \} \\ &\geq \inf_{\tau \in T(H)} \langle \tau, H - \bar{H}\rangle - \langle P(H - \bar{H}), H - \bar{H}\rangle. \end{aligned}$$

Vì $T(H)$ là compắc nên tồn tại $\tau_{\bar{H}} \in T(H)$ sao cho

$$f(H) \geq \langle \tau_{\bar{H}}, H - \bar{H}\rangle - \langle P(H - \bar{H}), H - \bar{H}\rangle.$$

Mặt khác, với $\bar{\tau} \in T(\bar{H})$ theo định nghĩa của $\bar{H}$ nó cũng là nghiệm của QVI(T, K), ta có $\langle \bar{\tau}, H - \bar{H} \rangle \geq 0$ với mỗi $H \in K(\bar{H})$. Từ tính đơn điệu mạnh của T với hệ số μ,

$$\langle \tau_{\bar{H}}, H - \bar{H} \rangle - \langle \bar{\tau}, H - \bar{H} \rangle \geq \mu \|H - \bar{H}\|^2.$$

Do đó,

$$\langle \tau_{\bar{H}}, H - \bar{H} \rangle \geq \mu \|H - \bar{H}\|^2.$$

Suy ra,

$$\begin{aligned} f(H) &\geq \mu \|H - \bar{H}\|^2 - \langle P(H - \bar{H}), H - \bar{H} \rangle \\ &\geq (\mu - \|P\|) \|H - \bar{H}\|^2. \end{aligned}$$

Vì $\mu > \|P\|$ nên, với mọi $H \neq \bar{H}$, $f(H) > 0$, điều này dẫn đến $\bar{H}$ là nghiệm duy nhất của QVI(T, K) trong $K(\bar{H})$. Hơn nữa, với mọi H thuộc $K(\bar{H})$,

$$\|H - \bar{H}\| \leq \sqrt{\frac{f(H)}{\mu - \|P\|}}.$$

Ta có điều cần chứng minh. □

Định lý 4.1.6. *Với dòng cân bằng $\bar{H} \in A$, $M := \sup\{\|\tau\| \mid \tau \in T(\bar{B}(\bar{H}, 1))\}$ và P (được định nghĩa trong công thức (4.1)), giả sử rằng*

(i) *T có giá trị lồi compắc khác rỗng và là đơn điệu mạnh với hệ số $\mu > 0$ trên $K(\bar{H})$;*

(ii) *ρ là Hölder calm với số mũ $\alpha > 2$ tại $\bar{H}$;*

(iii) *tồn tại $\eta \in (0, 1)$ thỏa $\chi := \mu - ML\eta^{\alpha-2} - \|P\|(1 - 2L - L^2) > 0$ với L là hệ số được xác định bởi tính Hölder calm của K với số mũ α trong Bổ đề 4.1.3.*

(iv) $\mathrm{Fix}(K) \subseteq \mathrm{dom} T$.

Khi đó, $\bar{H}$ là dòng cân bằng duy nhất trong $\bar{B}(\bar{H}, \eta) \cap K(\bar{H})$ và, với mọi $H \in \bar{B}(\bar{H}, \eta) \cap K(\bar{H})$,

$$\|H - \bar{H}\| \leq \sqrt{\frac{f(H)}{\chi}}.$$

Chứng minh. Xét $H \in \bar{B}(\bar{H}, \eta) \cap K(\bar{H})$ bất kỳ. Từ tính Hölder calm của ρ với bậc α và Bổ đề 4.1.3, ta có thể tìm được $\hat{F} \in K(H)$ sao cho $\|\bar{H} - \hat{F}\| \leq L\|\bar{H} - H\|^\alpha$. Ta có

$$\begin{aligned} f(H) &= \sup_{F \in K(H)} \inf_{\tau \in T(H)} \{\langle \tau, H - F\rangle - \langle P(H - F), H - F\rangle\} \\ &\geq \inf_{\tau \in T(H)} \{\langle \tau, H - \hat{F}\rangle - \langle P(H - \hat{F}), H - \hat{F}\rangle\}. \end{aligned}$$

Theo tính compắc của $T(H)$, tồn tại $\tau(\hat{F}) \in T(H)$ sao cho

$$\begin{aligned} f(H) &\geq \langle \tau(\hat{F}), H - \hat{F}\rangle - \langle P(H - \hat{F}), H - \hat{F}\rangle \\ &\geq \langle \tau(\hat{F}), H - \hat{F}\rangle - \|P\|\|H - \hat{F}\|^2 \\ &\geq \langle \tau(\hat{F}), H - \bar{H}\rangle + \langle \tau(\hat{F}), \bar{H} - \hat{F}\rangle - \|P\|(\|\bar{H} - \hat{F}\| + \|\bar{H} - H\|)^2. \end{aligned}$$

Hơn nữa, $\bar{H}$ là nghiệm của QVI(T, K) và $H \in K(\bar{H})$, nên tồn tại $\tau_{\bar{H}} \in T(\bar{H})$ sao cho $\langle \tau_{\bar{H}}, H - \bar{H}\rangle \geq 0$. Do đó, từ tính đơn điệu mạnh với hệ số μ của T, với mọi $\tau \in T(H)$,

$$\langle \tau, H - \bar{H}\rangle \geq \mu\|H - \bar{H}\|^2.$$

Bởi vì $\|\bar{H} - H\| \leq 1$, bất đẳng thức ở trên của $f(H)$ trở thành

$$\begin{aligned} f(H) &\geq \mu\|H - \bar{H}\|^2 - M\|\bar{H} - \hat{F}\| - \|P\|(\|\bar{H} - \hat{F}\| + \|\bar{H} - H\|)^2 \\ &\geq \mu\|H - \bar{H}\|^2 - ML\|\bar{H} - H\|^\alpha - \|P\|(L\|H - \bar{H}\|^\alpha + \|\bar{H} - H\|)^2 \\ &= \mu\|H - \bar{H}\|^2 - ML\|\bar{H} - H\|^\alpha \\ &- \|P\|(L^2\|H - \bar{H}\|^{2\alpha} + 2L\|H - \bar{H}\|^{\alpha+1} + \|H - \bar{H}\|^2) \\ &\geq (\mu - ML\|\bar{H} - H\|^{\alpha-2} - \|P\|(1 + 2L + L^2))\|H - \bar{H}\|^2 \\ &\geq (\mu - ML\eta^{\alpha-2} - \|P\|(1 + 2L + L^2))\|H - \bar{H}\|^2 \\ &= \chi\|H - \bar{H}\|^2. \end{aligned}$$

Khi đó, với mọi phần tử $H \in B(\bar{H}, \eta) \cap K(\bar{H})$ khác $\bar{H}$, ta có $f(H) > 0$ vì $\chi > 0$. Mặt khác, f là hàm đánh giá của QVI(T, K), nên $\bar{H}$ là nghiệm duy nhất của QVI(T, K) trên $B(\bar{H}, \eta) \cap K(\bar{H})$. Hơn nữa, với mọi $H \in B(\bar{H}, \eta) \cap K(\bar{H})$, ta có

$$\|H - \bar{H}\| \leq \sqrt{\frac{f(H)}{\chi}}.$$

□

Ví dụ sau đây minh họa kết quả đạt được của Định lý 4.1.5

Ví dụ 4.1.7. Xét Ví dụ 2.5.3, ta có $\bar{H} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ là dòng cân bằng duy nhất. Dễ dàng thấy rằng T đơn điệu mạnh với $\mu = 1$, K đồng thời là tập lồi compắc khác rỗng và là tập điểm bất động đối xứng. Bởi vì $\|\cdot\|$ trong $\mathbb{B}^3$ là chuẩn Euclide và $P = \beta$I với $0 < \beta < \mu$, ta có

$$\begin{aligned}\|H - \bar{H}\| &= \sqrt{(H_1 - \frac{1}{2})^2 + (H_2 - \frac{1}{2})^2 + (1-1)^2} \\ &= \sqrt{H_1^2 + H_2^2 - \frac{1}{2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(H) &= \sup_{F \in K(H)} [\inf_{\tau \in T(H)} \langle \tau, H - F\rangle - \beta\|H - F\|^2] \\ &= \sup_{F \in K(H)} [\langle H, H - F\rangle - \beta\|H - F\|^2].\end{aligned}$$

Từ cấu trúc đặc biệt của tập K, ta có

$$f(H) = \langle H, H - F_\beta(H)\rangle - \beta\|F_\beta(H) - H\|^2,$$

với

$$\begin{aligned}F_\beta(H) &:= (I - \phi^T(\phi\phi^T)^{-1}\phi)(H - \frac{1}{2\beta}H) + \phi^T(\phi\phi^T)^{-1}\rho(H) \\ &= (\frac{2\beta-1}{4\beta}(H_1 - H_2) + \frac{1}{2}, \frac{2\beta-1}{4\beta}(H_2 - H_1) + \frac{1}{2}, 1).\end{aligned}$$

Do đó,

$$f(H) = (H_1^2 + H_2^2 - \frac{1}{2})(1-\beta) + \frac{(2\beta+1)^2}{8\beta}(H_1 - H_2)^2.$$

Điều này kéo theo $f(H) \geq 0$ với mọi $\beta \in (0,1)$ và $f((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)) = 0$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{f(H)}{1-\beta}} &= \sqrt{\frac{(H_1^2 + H_2^2 - \frac{1}{2})(1-\beta) + \frac{(2\beta+1)^2}{8\beta}(H_1 - H_2)^2}{1-\beta}} \\ &= \sqrt{H_1^2 + H_2^2 - \frac{1}{2} + \frac{(2\beta+1)^2}{8\beta(1-\beta)}(H_1 - H_2)^2}.\end{aligned}$$

Suy ra,

$$\|H - \bar{H}\| \leq \sqrt{\frac{f(H)}{1-\beta}} \text{ với mọi } H \in K.$$

Ta có khẳng định trong Định lý 4.1.5.

4.2 Nghiệm xấp xỉ của mạng giao thông

Tính đặt chỉnh Tikhonov dựa trên khái niệm về dãy nghiệm xấp xỉ. Do đó, để nghiên cứu tính đặt chỉnh cho bài toán cân bằng giao thông trong phần cuối của chương này chúng ta cần xét một số dạng nghiệm xấp xỉ của mạng giao thông.

Với $\delta \geq 0$, tập nghiệm xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân QVI(T, K) được xác định bởi công thức

$$\mathcal{Q}(\delta) := \{H \in K(H) | \; \exists t \in T(H) \text{ sao cho } \forall F \in K(H), \; \langle t, F - H \rangle + \delta \geq 0\}.$$

Xét $0 \leq e \leq \frac{1}{2} \min_{s=1,\dots,m}\{\gamma_s\}$. Định nghĩa về dòng cân bằng xấp xỉ tương ứng với nghiệm xấp xỉ của QVI(T, K) là như sau.

Định nghĩa 4.2.1. *Véctơ dòng đường $H \in K(H)$ được gọi là dòng cân bằng xấp xỉ tương ứng với e (viết tắt là, dòng e-cân bằng) nếu, với mỗi cặp đầu/cuối W_j, $j = 1, \dots, l$, và mọi đường q, s nối cặp đầu cuối này (nghĩa là $q, s \in P_j$), tồn tại giá $t \in T(H)$ sao cho*

$$t_q < t_s \implies H_q \in [\gamma_q - e, \gamma_q] \;\; \textit{hoặc} \;\; H_s \in [0, e].$$

Ký hiệu $\mathcal{T}(e)$ là tập các dòng e-cân bằng của TNP(T, ρ).

Ví dụ sau đây chỉ ra rằng, QVI(T, K) có nghiệm xấp xỉ với $\delta > 0$ thích hợp, tuy nhiên QVI(T, K) không tồn tại nghiệm chính xác.

Ví dụ 4.2.2. Xét mạng giao thông trong Ví dụ 2.5.3. Cho $\delta > 0$ và hàm giá

$$T(F) = \begin{cases} \{(\frac{1}{2} + \delta, \frac{1}{2}, 1)\} & \text{nếu} \quad F = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1), \\ \{F\} & \text{nếu} \quad F \in K \backslash \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}. \end{cases}$$

Ta chứng minh rằng QVI(T, K) vô nghiệm với mọi $\delta > 0$. Từ Ví dụ 2.5.3, $H \in K \backslash \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}$ không là nghiệm của QVI(T, K). Ta chỉ cần chứng minh $\bar{H} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ cũng không là nghiệm của QVI(T, K). Thật vậy, với mọi $F \in K$, ta có

$$\begin{aligned} \langle t, F - \bar{H} \rangle &= \langle (\frac{1}{2} + \delta, \frac{1}{2}, 1), (F_1, F_2, F_3) - (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1) \rangle \\ &= \frac{1}{2}(F_1 - \frac{1}{2}) + \delta(F_1 - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(F_2 - \frac{1}{2}) + F_3 - 1 = \delta(F_1 - \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

Chọn $F = (0, 1, 1) \in K$, ta thấy rằng

$$\langle t, F - \bar{H} \rangle = -\frac{1}{2}\delta < 0,$$

nghĩa là, $\bar{H}$ không là nghiệm của QVI(T, K). Tuy nhiên, với mỗi $\delta > 0$ cho trước, ta có $\langle t, F - \bar{H} \rangle + \delta = \delta(F_1 - \frac{1}{2}) + \delta = \delta(F_1 + \frac{1}{2}) > 0$. Do đó, $\bar{H} \in \mathcal{Q}(\delta)$.

Mệnh đề sau đây chỉ ra mối quan hệ của tập nghiệm xấp xỉ của QVI(T, K) và tập các dòng cân bằng xấp xỉ của TNP(T, ρ) tương ứng. Giả sử rằng

$$\kappa := \sup_{H \in A} \sup_{t \in T(H)} \sup_{p=1,\dots,m} \{t_p\} < +\infty.$$

Mệnh đề 4.2.3. *Với e và κ được định nghĩa như trên, ta có $\mathcal{T}(e) \subseteq \mathcal{Q}(m\kappa e)$.*

Chứng minh. Giả sử rằng $\bar{H}$ là dòng e-cân bằng. Với mỗi cặp đầu/cuối W_j, đặt

$$C_j(\bar{H}) := \{q \in P_j | \bar{H}_q < \gamma_q - e\} \text{ và } D_j(\bar{H}) := \{s \in P_j | \bar{H}_s > e\}.$$

Từ định nghĩa của dòng e-cân bằng, $\bar{t}_q(\bar{H}) \geq \bar{t}_s(\bar{H})$ nếu $q \in C_j(\bar{H})$ và $s \in D_j(\bar{H})$. Chọn $\chi_j(\bar{H})$ sao cho

$$\inf_{q \in C_j(\bar{H})} \{\bar{t}_q(\bar{H})\} \geq \chi_j(\bar{H}) \geq \sup_{s \in D_j(\bar{H})} \{\bar{t}_s(\bar{H})\}.$$

Chúng ta cần kiểm tra $\bar{H} \in \mathcal{Q}(\delta)$ với $\delta = m\kappa e$. Để thuận tiện khi trình bày chứng minh, trong phần còn lại ta sẽ sử dụng ký hiệu $\bar{t}_q$ và χ_j lần lượt thay thế cho $\bar{t}_q(\bar{H})$ và $\chi_j(\bar{H})$. Xét cặp đầu/cuối W_j, đường $r \in P_j$ và dòng $F \in K(\bar{H})$ bất kỳ.
Nếu $\bar{t}_r < \chi_j$, thì $r \notin C_j(\bar{H})$, nghĩa là $\bar{H}_r \in [\gamma_r - e, \gamma_r]$. Do đó,

$$(\bar{t}_r - \chi_j)(F_r - \bar{H}_r - e) \geq 0,$$

suy ra

$$\bar{t}_r(F_r - \bar{H}_r) \geq \chi_j(F_r - \bar{H}_r) - e\chi_j + e\bar{t}_r.$$

Nếu $\bar{t}_r > \chi_j$, thì $r \notin D_j(\bar{H})$, nghĩa là $\bar{H}_r \in [0, e]$. Do vậy,

$$(\bar{t}_r - \chi_j)(F_r - \bar{H}_r + e) \geq 0,$$

tức là

$$\bar{t}_r(F_r - \bar{H}_r) \geq \chi_j(F_r - \bar{H}_r) + e\chi_j - e\bar{t}_r.$$

Nếu $\bar{t}_r = \chi_j$, thì

$$\bar{t}_r(F_r - \bar{H}_r) = \chi_j(F_r - \bar{H}_r).$$

Với mọi W_j và $r \in P_j$, ta có

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar{t}, F - \bar{H} \right\rangle &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{r \in P_j} \bar{t}_r(F_r - \bar{H}_r) \\
&\geq \sum_{j=1}^{l} [\sum_{\bar{t}_r < \chi_j} (\chi_j(F_r - \bar{H}_r) - e\chi_j + e\bar{t}_r) + \sum_{\bar{t}_r = \chi_j} \chi_j(F_r - \bar{H}_r) \\
&+ \sum_{\bar{t}_r > \chi_j} (\chi_j(F_r - \bar{H}_r) + e\chi_j - e\bar{t}_r)] \\
&\geq \sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r < \chi_j} \chi_j(F_r - \bar{H}_r) - e\sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r < \chi_j} \chi_j + e\sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r < \chi_j} \bar{t}_r \\
&+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r = \chi_j} \chi_j(F_r - \bar{H}_r) \\
&+ \sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r > \chi_j} \chi_j(F_r - \bar{H}_r) + e\sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r > \chi_j} \chi_j - e\sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r > \chi_j} (\bar{t}_r) \\
&\geq \sum_{j=1}^{l} \sum_{r \in P_j} \chi_j(F_r - \bar{H}_r) - e\sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r < \chi_j} \chi_j - e\sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r > \chi_j} (\bar{t}_r) \\
&\geq \sum_{j=1}^{l} \chi_j[\rho_j(\bar{H}) - \rho_j(\bar{H})] - e\sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r < \chi_j} \kappa - e\sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r > \chi_j} \kappa \\
&\geq 0 - e\sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r \neq \chi_j} \kappa \geq -m\kappa e.
\end{aligned}$$

Suy ra $\left\langle \bar{t}, F - \bar{H} \right\rangle + m\kappa e \geq 0$. Vậy $\bar{H} \in \mathcal{Q}(m\kappa e)$. □

Ví dụ sau đây minh họa kết quả của Mệnh đề 4.2.3.

Ví dụ 4.2.4. Xét mạng giao thông được cho ở Ví dụ 2.5.3, với hàm giá là $T(F) = \{1 - F\}$. Trong mô hình này $m = 3, \kappa = 1$ do đó ta có thể chọn $e = \frac{1}{2}$. Khi đó tập dòng chấp nhận được là

$$K = \{F \in A | F_1 + F_2 = 1, F_3 = 1\} = \{(\epsilon, 1 - \epsilon, 1), (1 - \epsilon, \epsilon, 1) | \epsilon \in (0, e]\}.$$

Dễ dàng thấy rằng $\mathcal{T}(e) \subseteq K$, chúng ta chỉ cần kiểm tra $K \subseteq \mathcal{Q}(m\kappa e)$. Nếu $\bar{H} = (\epsilon, 1-\epsilon, 1)$, hàm giá tương ứng với $\bar{H}$ là $\bar{t} = (1-\epsilon, \epsilon, 0)$. Ta có, với mọi $F \in K$ và $\epsilon \in (0, e]$,

$$\begin{aligned}\langle \bar{t}, F - \bar{H}\rangle + m\kappa e &= \langle (1-\epsilon, \epsilon, 0), (F_1, F_2, F_3) - (\epsilon, 1-\epsilon, 1)\rangle + m\kappa e\\ &= \langle \bar{t}, F - \bar{H}\rangle + 3e \geq \langle \bar{t}, F - \bar{H}\rangle + 2\epsilon + e\\ &= F_1(1-\epsilon) + \epsilon F_2 + 2\epsilon^2 + e \geq 0,\end{aligned}$$

nghĩa là, $\bar{H} \in \mathcal{Q}(m\kappa e)$. Tương tự $\bar{H} = (1-\epsilon, \epsilon, 1) \in \mathcal{Q}(m\kappa e)$. Do vậy,

$$\mathcal{T}(e) \subseteq K \subseteq \mathcal{Q}(m\kappa e).$$

Tiếp theo ta chứng minh $\mathcal{T}(e) = K$ (với $e = \frac{1}{2}$). Xét trường hợp $\bar{H} = (\epsilon, 1-\epsilon, 1)$ với $\epsilon \in (0, e]$. Với cặp đầu/cuối W_1, ta có $\bar{t}_2 < \bar{t}_1$, $\bar{H}_2 = 1-\epsilon \in [1-e, 1]$, $\bar{H}_1 = \epsilon \in [0, e]$. Tương tự cho cặp đầu/cuối W_2, ta có $\bar{t}_3 = 0$, $\bar{H}_3 = 1 \in [1-e, 1]$. Do đó, $\bar{H}$ thỏa mãn định nghĩa về dòng e cân bằng. Chứng minh tương tự cho $\bar{H} = (1-\epsilon, \epsilon, 1)$. Hơn nữa, ta cần chứng minh mỗi dòng $\bar{H}$ của tập $\mathcal{T}(e)$ đều thuộc tập $\mathcal{T}$ nếu và chỉ nếu $\epsilon = \frac{1}{2}$, nghĩa là $\mathcal{T} = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\}$. Thật vậy với $\bar{H} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, giá tương ứng là $t = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$. Xét cặp đầu/cuối W_1, vì $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$, nên rõ ràng thỏa mãn định nghĩa về dòng cân bằng $\bar{H}$. Tương tự cho cặp đầu/cuối W_2 vì $t_3 = 0$. Do đó, $\bar{H}$ là dòng cân bằng, suy ra $\bar{H} \in \mathcal{T}$. Ta tiếp tục xét các dòng cân bằng khác trong tập $\mathcal{T}(e)$. Với mọi $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ và $F \in K$, ta có

$$\begin{aligned}\langle \bar{t}, F - \bar{H}\rangle &= \langle (1-\epsilon, \epsilon, 0), (F_1, F_2, F_3) - (\epsilon, 1-\epsilon, 1)\rangle\\ &= F_1(1-\epsilon) + \epsilon F_2 + 2\epsilon^2 - 2\epsilon.\end{aligned}$$

Chọn $F = (0, 1, 1) \in K$ ta thấy rằng

$$\langle \bar{t}, F - \bar{H}\rangle = 2\epsilon^2 - \epsilon < 0.$$

Do vậy, $\bar{H} \notin \mathcal{T}$. Tương tự cho $\bar{H} = (1-\epsilon, \epsilon, 1) \notin \mathcal{T}$ với $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

Mệnh đề sau đây chỉ ra chiều ngược lại của bao hàm thức của Mệnh đề 4.2.3. Với dòng $\bar{H} \in K(\bar{H})$ cho trước, ký hiệu

$$\beta_{\bar{H}} := \inf\{|t_s - t_q| | \forall t \in T(\bar{H}), t_s \neq t_q\}.$$

Mệnh đề 4.2.5. *Nếu* $\bar{H} \in \mathcal{Q}(\frac{\beta_{\bar{H}}e}{2})$ *thì* $\bar{H} \in \mathcal{T}(e)$*, nghĩa là,* $\mathcal{Q}(\frac{\beta_{\bar{H}}e}{2}) \subseteq \mathcal{T}(e)$*.*

Chứng minh. Giả sử trái lại rằng $\bar{H}$ không là dòng e-cân bằng, nghĩa là, tồn tại W_j và $q, s \in P_j$ sao cho, với mọi $t \in T(\bar{H})$, tồn tại $t_q < t_s$ sao cho $\bar{H}_q < \gamma_q - e$ và $\bar{H}_s > e$. Để xuất hiện mâu thuẫn ta chọn một dòng F như sau.

(a) Nếu $\bar{H}_q + \bar{H}_s > \gamma_q$, ta đặt

$$F_p := \begin{cases} \bar{H}_p & \text{nếu} \quad p \neq q, p \neq s, \\ \bar{H}_q + \bar{H}_s - \gamma_q & \text{nếu} \quad p = s, \\ \gamma_q & \text{nếu} \quad p = q. \end{cases}$$

(b) Nếu $\bar{H}_q + \bar{H}_s \leqslant \gamma_q$, ta đặt

$$F_p := \begin{cases} \bar{H}_p & \text{nếu} \quad p \neq q, p \neq s, \\ 0 & \text{nếu} \quad p = s, \\ \bar{H}_q + \bar{H}_s & \text{nếu} \quad p = q. \end{cases}$$

Trong cả hai trường hợp, ta có $\sum_{p \in P_j} F_p = \sum_{p \in P_j} \bar{H}_p$, với mọi $j = 1, \ldots, l$. Do đó, $\phi(F) = \phi(\bar{H})$, nghĩa là $F \in K(\bar{H})$. Hơn nữa, trong trường hợp (a) ta có, với mọi $t \in T(\bar{H})$,

$$\begin{aligned} \langle t, F - \bar{H} \rangle &= \sum_{p=1}^{m} t_p(F_p - \bar{H}_p) \\ &= t_s(F_s - \bar{H}_s) + t_q(F_q - \bar{H}_q) \\ &= -(t_s - t_q)(\gamma_q - \bar{H}_q) \\ &\leq -\beta_{\bar{H}}(\gamma_q - \bar{H}_q) \leq -\beta_{\bar{H}}e, \end{aligned}$$

nghĩa là

$$\langle t, F - \bar{H} \rangle + \frac{\beta_{\bar{H}}e}{2} \leq -\frac{\beta_{\bar{H}}e}{2} < 0.$$

Tương tự cho trường hợp (b), ta có

$$\langle t, F - \bar{H} \rangle = \sum_{p=1}^{m} t_p(F_p - \bar{H}_p) = -(t_s - t_q)\bar{H}_s \leq -\beta_{\bar{H}}e,$$

nghĩa là

$$\langle t, F - \bar{H} \rangle + \frac{\beta_{\bar{H}}e}{2} \leq -\frac{\beta_{\bar{H}}e}{2} < 0.$$

là mâu thuẫn với giả thiết $\bar{H} \in \mathcal{Q}(\frac{\beta_{\bar{H}}e}{2})$. □

Theo phương pháp nghiên cứu của E. S. Levitin và B. T. Polyak [44] và các kết quả mở rộng của X. X. Huang và X. Q. Yang [29], các nghiệm xấp xỉ được xét cho tập ràng buộc xấp xỉ. Do đó, ta xét các dòng thỏa mãn với nhu cầu biến đổi như sau. Với $j = 1, \dots, l$, xét $B^{\mathbb{B}^{r_j}} := \{v = (v_1, v_2, \dots, v_{r_j}) \in \mathbb{B}^{r_j} | \max_{s=1,\dots,r_j} |v_s| \le \frac{1}{\sqrt{r_j}}\}$, $B^{\Pi} := \prod_{j=1}^{l} B^{\mathbb{B}^{r_j}} \subseteq \mathbb{B}^m$ và $B := \prod_{j=1}^{l} [-\sqrt{r_j}, \sqrt{r_j}] \subseteq \mathbb{B}^l$. Với mỗi $\omega \ge 0$. Ta có tập chấp nhận được xấp xỉ sau đây

$$K(H) + \omega B^{\Pi}.$$

Bổ đề sau chỉ ra mối quan hệ của tập này với tập dòng thỏa mãn nhu cầu xấp xỉ

$$\{F \in A | \phi F \in \rho(H) + \omega B\}.$$

Bổ đề 4.2.6. *Với mỗi* $\omega \ge 0$,

$$K(H) + \omega B^{\Pi} \subseteq \{F \in A | \phi F \in \rho(H) + \omega B\}.$$

Chứng minh. Với mỗi $j = 1, \dots, l$, ký hiệu $F^j := (F_1^j, F_2^j, \dots, F_{r_j}^j) \in \mathbb{B}^{r_j}$ và $F := (F^1, F^2, \dots, F^l) \in \mathbb{B}^m$. Chiếu tập $K(H) + \omega B^{\Pi}$ lên $\mathbb{B}^{r_j}$, ta có $K^j(H) + \omega B^{\mathbb{B}^{r_j}}$, với $K^j(H) := \{F^j \in R^{r_j} | \sum_{s=1}^{r_j} F_s^j = \rho_j(H)\}$. Ta cần chứng minh rằng, với mọi $j = 1, \dots, l$,

$$K^j(H) + \omega B^{\mathbb{B}^{r_j}} \subseteq \{F^j | \sum_{s=1}^{r_j} F_s^j \in \rho_j(H) + w[-\sqrt{r_j}, \sqrt{r_j}]\}.$$

Nếu $F^j \in K^j(H) + \omega B^{\mathbb{B}^{r_j}}$, ta có $\bar{F}^j \in K^j(H)$ và $\omega v^j := \omega(v_1^j, \dots, v_{r_j}^j) \in \omega B^{\mathbb{B}^{r_j}}$ sao cho $F^j = \bar{F}^j + \omega v^j$. Khi đó,

$$\sum_{s=1}^{r_j} F_s^j = \sum_{s=1}^{r_j} \bar{F}_s^j + \omega \sum_{s=1}^{r_j} v_s^j = \rho_j(H) + \omega \sum_{s=1}^{r_j} v_s^j.$$

Vì $-\frac{1}{\sqrt{r_j}} \le v_s^j \le \frac{1}{\sqrt{r_j}}$, nên ta có $|\sum_{s=1}^{r_j} v_s^j| \le \frac{r_j}{\sqrt{r_j}} = \sqrt{r_j}$ suy ra

$$\sum_{s=1}^{r_j} F_s^j \in [\rho_j(H) - \sqrt{r_j}\omega, \rho_j(H) + \sqrt{r_j}\omega].$$

□

Lưu ý rằng chiều ngược lại của bao hàm thức trên nói chung không đúng. Ví dụ sau đây minh họa điều này.

Ví dụ 4.2.7. Xét mạng giao thông trong Ví dụ 2.5.3. Với $\omega \geq 0$, ta có $B^{\Pi} = B^{\mathbb{R}^{r_1}} \times B^{\mathbb{R}^{r_2}}$, $B^{\mathbb{R}^{r_1}} = \{v \in \mathbb{B}^2 | \max_{s=1,2} |v_s| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\}, B^{\mathbb{R}^{r_2}} = \{u \in \mathbb{R} || u| \leq 1\}, B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-1, 1]$. Tập $K + \omega B$ được xác định như sau

$$\begin{cases} 1 - \omega\sqrt{2} \leq F_1 + F_2 \leq 1 + \omega\sqrt{2}, \\ 1 - \omega \leq F_3 \leq 1 + \omega. \end{cases}$$

Cho $\omega = 1$. Dễ dàng tính được $K + B = \{F \in A | \phi F \in \rho(H) + B\}$ là một đa diện $K_1H_1I_1P_1Q_1.K_2H_2OP_2Q_2$, với tọa độ các đỉnh là $K_1(0, 1 + \sqrt{2}, 2)$, $H_1(1 + \sqrt{2}, 0, 2)$, $I_1(0, 0, 2)$, $P_1(1-\sqrt{2}, 0, 2)$, $Q_1(0, 1-\sqrt{2}, 2)$, $K_2(0, 1+\sqrt{2},)$, $H_2(1+\sqrt{2}, 0, 0)$, $O(0, 0, 0)$, $P_2(1 - \sqrt{2}, 0, 0)$, và $Q_2(0, 1 - \sqrt{2}, 0)$. Do đó, giá trị lớn nhất của tọa độ các đỉnh là $1 + \sqrt{2}$.

Mặt khác, tập $K+B^{\Pi}$ là một đa diện $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1.A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2H_2$ với tọa độ tương ứng của các đỉnh là $A_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$, $B_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$, $C_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$, $D_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$, $E_1(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$, $F_1(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$, $G_1(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$, $H_1(1+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 2)$, $A_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $B_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1+\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $C_2(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $D_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $E_2(1+\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $F_2(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, $G_2(1-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$, và $H_2(1+\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Giá trị lớn nhất của tọa độ các đỉnh $1+\frac{1}{\sqrt{2}}$. Do vậy, $F = (0, 1+\sqrt{2}, 2)$ thuộc $K+B$, nhưng không thuộc $K + B^{\Pi}$.

Với $\delta \geq 0$ và $\omega \geq 0$ đã cho ở trên, ký hiệu

$$\mathcal{Q}(\delta, \omega) := \{\bar{H} \in A \cap (K(\bar{H}) + \omega B^{\Pi}) | \exists t \in T(\bar{H}), \forall F \in A \cap (K(\bar{H}) + \omega B^{\Pi}),$$
$$\langle t, F - \bar{H} \rangle + \delta \geq 0\}$$

là tập các nghiệm δ-ω xấp xỉ của QVI(T, K). Ta phát biểu định nghĩa dòng cân bằng xấp xỉ tương ứng cho mạng giao thông như sau.

Định nghĩa 4.2.8. *Với e trong Định nghĩa 4.2.1 và $\omega \geq 0$. Véctơ dòng đường H được gọi là dòng cân bằng xấp xỉ ràng buộc (tương ứng với e và ω) nếu $H \in$*

$A \cap (K(H) + \omega B^{\Pi})$ và, với mọi W_j, $j = 1, \dots, l$, và mọi $q, s \in P_j$, tồn tại $t \in T(H)$ sao cho

$$t_q < t_s \Longrightarrow H_q \in [\gamma_q - e, \gamma_q] \text{ hoặc } H_s \in [0, e].$$

Khi đó dòng H được gọi là dòng e-ω-cân bằng.

Ký hiệu $\mathcal{T}(e, \omega)$ là tập các dòng e-ω-cân bằng. Ta có mối quan hệ sau.

Mệnh đề 4.2.9. *Với e trong Định nghĩa 4.2.1 và $\omega \geq 0$ ta có*

$$\mathcal{T}(e, \omega) \subseteq \mathcal{Q}(m\kappa(2\omega + e), \omega).$$

Chứng minh. Giả sử rằng $\bar{H}$ là dòng e-ω-cân bằng. Với $F \in A \cap (K(\bar{H}) + \omega B^{\Pi})$ bất kỳ, ta có

$$\begin{aligned}
\left\langle \bar{t}, F - \bar{H} \right\rangle &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{r \in P_j} \bar{t}_r (F_r - \bar{H}_r) \\
&\geq \sum_{j=1}^{l} \sum_{r \in P_j} \chi_j (F_r - \bar{H}_r) - e \sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r < \chi_j} \chi_j - e \sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r > \chi_j} \bar{t}_r \\
&\geq \sum_{j=1}^{l} \chi_j [(\rho_j(\bar{H}) - \frac{1}{\sqrt{r_j}} \omega) - (\rho_j(\bar{H}) + \frac{1}{\sqrt{r_j}} \omega)] \\
&- e \sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r < \chi_j} \kappa - e \sum_{j=1}^{l} \sum_{\bar{t}_r > \chi_j} \kappa \\
&\geq -2\omega\kappa \sum_{j=1}^{l} \frac{1}{\sqrt{r_j}} - m\kappa e \geq -2\omega\kappa \sum_{j=1}^{l} r_j - m\kappa e = -m\kappa(2\omega + e),
\end{aligned}$$

ở đó, bất đẳng thức đầu thỏa như trong chứng minh của Mệnh đề 4.2.3 và bất đẳng thức tiếp theo thỏa mãn bởi $F, \bar{H} \in K(\bar{H}) + \omega B^{\Pi}$. Ta kết luận rằng,

$$\left\langle \bar{t}, F - \bar{H} \right\rangle + m\kappa(2\omega + e) \geq 0,$$

nghĩa là, $\bar{H} \in \mathcal{Q}(m\kappa(2\omega + e), \omega)$. □

Để minh họa Mệnh đề 4.2.9 ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 4.2.10. Xét mạng giao thông trong Ví dụ 2.5.3, với hàm giá mới như sau

$$T(F_1,F_2,F_3)=\begin{cases}\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\} & \text{nếu} \quad (F_1,F_2,F_3)\in A\setminus K,\\ \{(F_1,F_2,F_3)\} & \text{nếu} \quad (F_1,F_2,F_3)\in K\setminus\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\},\\ \{(\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2},1)\} & \text{nếu} \quad (F_1,F_2,F_3)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),\end{cases}$$

với $\delta>0$ cố định. Khi đó ta có $\kappa=\sup\{\frac{1}{2}+\delta,1\}\geq 1$. Ta sẽ xét các dòng cân bằng xấp xỉ như sau. Cho $\omega\geq 0$ và $e\in[0,\frac{1}{2})$ cố định. Từ Ví dụ 4.2.7, các dòng F thuộc tập $K+\omega B^{\Pi}$ thỏa mãn

$$\begin{cases}1-\omega\frac{1}{\sqrt{2}}\leq F_1+F_2\leq 1+\omega\frac{1}{\sqrt{2}},\\ 1-\omega\leq F_3\leq 1+\omega.\end{cases}$$

Ví dụ 2.5.3 chỉ ra rằng mạng giao thông không tồn tại dòng cân bằng, nghĩa là, $S=\emptyset$. Ta cần chỉ ra TNP(T,ρ) không có dòng e-cân bằng. Nếu $H=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$, thì $t=(\frac{1}{2}+\delta,\frac{1}{2},1)$. Ta có $t_2<t_1$, $H_2=\frac{1}{2}\notin[1-e,1]$ và $H_1=\frac{1}{2}\notin[0,e]$. Do đó, H không là dòng e-cân bằng. Với mọi dòng $H\in K\setminus\{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)\}$ có dạng $H=(\frac{1}{2}-\epsilon,\frac{1}{2}+\epsilon,1)$ hoặc $H=(\frac{1}{2}+\epsilon,\frac{1}{2}-\epsilon,1)$ với $0<\epsilon\leq\frac{1}{2}$. Xét trường hợp $H=(\frac{1}{2}-\epsilon,\frac{1}{2}+\epsilon,1)$ và $t=(\frac{1}{2}-\epsilon,\frac{1}{2}+\epsilon,1)$. Ta có $t_1<t_2$, $H_1=\frac{1}{2}-\epsilon\notin[1-e,1]$ và $H_2=\frac{1}{2}+\epsilon\notin[0,e]$. Do đó, H không là dòng e-cân bằng. Tương tự, $H=(\frac{1}{2}+\epsilon,\frac{1}{2}-\epsilon,1)$ cũng không là dòng e-cân bằng. Do đó, $\mathcal{T}(e)=\emptyset$ với mọi $e\in[0,\frac{1}{2})$.

Tiếp theo, ta cần chứng minh $\mathcal{T}(e,\omega)=\mathcal{Q}(m\kappa(2\omega+e),\omega)=(A\cap(K+\omega B^{\Pi}))\setminus K$. Vì $T(F)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$ là hàm hằng với mọi $F\in A\setminus K$, điều kiện cân bằng trong định nghĩa dòng cân bằng hiển nhiên thỏa mãn. Do đó, $\mathcal{T}(e,\omega)=(A\cap(K+\omega B^{\Pi}))\setminus K$. Cuối cùng, chúng ta cần chứng minh đẳng thức $\mathcal{Q}(m\kappa(2\omega+e),\omega)=(A\cap(K+\omega B^{\Pi}))\setminus K$. Với $H\in(A\cap(K+\omega B^{\Pi}))\setminus K$ và với mọi $F\in(A\cap(K+\omega B^{\Pi}))$, ta có

$$\begin{aligned}\langle t,F-H\rangle&=\langle(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),(F_1,F_2,F_3)-(H_1,H_2,H_3)\rangle\\&=\frac{1}{2}(F_1+F_2)-\frac{1}{2}(H_1+H_2)+F_3-H_3\\&\geq\frac{1}{2}(1-\omega\frac{1}{\sqrt{2}})-\frac{1}{2}(1+\omega\frac{1}{\sqrt{2}})+1-\omega-(1+\omega)\\&=-\omega(\frac{1}{\sqrt{2}}+2).\end{aligned}$$

Suy ra,

$$\begin{aligned}\langle t, F-H\rangle + m\kappa(2\omega+e) &\geq -\omega(\frac{1}{\sqrt{2}}+2)+3(2\omega+e)\\ &= 3e+(4-\frac{1}{\sqrt{2}})\omega \geq 0,\end{aligned}$$

nghĩa là, $H \in \mathcal{Q}(m\kappa(2\omega+e),\omega)$. Do đó,

$$\mathcal{T}(e,\omega) = \mathcal{Q}(m\kappa(2\omega+e),\omega) = (A \cap (K+\omega B^{\Pi})) \setminus K.$$

Với $\bar{H} \in A \cap (K(\bar{H}) + \omega B^{\Pi})$, đặt

$$\beta_{\bar{H}} := \inf\{|t_s - t_q| | \forall t \in T(\bar{H}), t_s \neq t_q\}.$$

Tương tự Mệnh đề 4.2.5, lưu ý rằng $\beta_{\bar{H}}$ phụ thuộc vào ω, ta có.

Mệnh đề 4.2.11. *Với e trong Định nghĩa 4.2.1 và $\omega \geq 0$, nếu $\bar{H} \in \mathcal{Q}(\frac{\beta_{\bar{H}} e}{2},\omega)$, thì $\bar{H} \in \mathcal{T}(e,\omega)$, nghĩa là, $\mathcal{Q}(\frac{\beta_{\bar{H}} e}{2},\omega) \subseteq \mathcal{T}(e,\omega)$.*

4.3 Tính đặt chỉnh của mạng giao thông có tham số

Mục này thiết lập tính đặt chỉnh của mạng giao thông có tham số. Giả sử rằng giá trên đường bị nhiễu, nghĩa là nó phụ thuộc vào tham số nhiễu u của không gian mêtric U. Khi đó, $T : \mathbb{B}^m_+ \times U \rightrightarrows \mathbb{B}^m_+$ là các ánh xạ đa trị với $T(F,u) = (T_1(F,u),\ldots,T_m(F,u))$. Với mỗi $u \in U$, ta có mạng giao thông tham số TNP$(T,\rho)_u$ và bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tham số tương ứng QVI$(T,K)_u$. Xét e trong Định nghĩa 4.2.1 và $\delta,\omega \geq 0$, ta ký hiệu các tập nghiệm xấp xỉ tương ứng của QVI$(T,K)_u$ và TNP$(T,\rho)_u$ lần lượt là $\mathcal{Q}(\delta,\omega,u)$ và $\mathcal{T}(e,\omega,u)$. Ta gọi $\{\text{QVI}(T,K)_u\}_{u\in U}$ ($\{\text{TNP}(T,\rho)_u\}_{u\in U}$, tương ứng) là họ các tựa bất đẳng thức biến phân đa trị có tham số (họ các mạng giao thông có tham số, tương ứng), để thuận tiện ta ký hiệu $\{\text{QVI}(T,K)_U\}$ ($\{\text{TNP}(T,\rho)_U\}$, tương ứng). Trong phần này, chúng ta tập trung vào nghiên cứu tính ổn định của tập nghiệm nên luôn giả thiết rằng các tập nghiệm xấp xỉ của hai bài toán này khác rỗng.

Trước khi nghiên cứu mạng giao thông, chúng ta cần thiết lập tính đặt chỉnh cho bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị có tham số.

Định nghĩa 4.3.1. *H^n là dãy xấp xỉ của $\mathrm{QVI}(T,K)_{\bar{u}}$ tương ứng với $u^n \to \bar{u}$ nếu tồn tại các dãy ω^n và δ^n cùng hội tụ về 0_+, sao cho, với mọi $n \in \mathbb{N}$, $H^n \in A \cap (K(H^n) + \omega^n B^\Pi)$, và tồn tại $t^n \in T(H^n, u^n)$ sao cho, với mọi $F \in A \cap (K(H^n) + \omega^n B^\Pi)$, ta có*

$$\langle t^n, F - H^n \rangle + \delta^n \geq 0.$$

Định nghĩa 4.3.2. $\{\mathrm{QVI}(T,K)_U\}$ *được gọi là đặt chỉnh (đặt chỉnh duy nhất tương ứng) tại $\bar{u}$ nếu*

(a) *Tập nghiệm $\mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$ của $\mathrm{QVI}(T,K)_{\bar{u}}$ khác rỗng (duy nhất nghiệm tương ứng);*

(b) *Với mỗi dãy $u^n \to \bar{u}$, mỗi dãy xấp xỉ của $\mathrm{QVI}(T,K)_{\bar{u}}$ tương ứng với u^n có dãy con hội tụ về phần tử (hội tụ về nghiệm duy nhất tương ứng) của $\mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$.*

Định lý 4.3.3. *Giả sử rằng $K(\cdot)$ là liên tục với giá trị compắc trên A và $T(\cdot,\cdot)$ là nửa liên tục trên với giá trị compắc trên $A \times \{\bar{u}\}$. Khi đó, $\{\mathrm{QVI}(T,K)_U\}$ là đặt chỉnh tại $\bar{u}$. Hơn nữa, nếu $\mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$ là duy nhất nghiệm thì $\{\mathrm{QVI}(T,K)_U\}$ là đặt chỉnh duy nhất.*

Chứng minh. Trước tiên chúng ta chứng minh $\mathcal{Q}(\cdot,\cdot,\cdot)$ là nửa liên tục trên tại $(0,0,\bar{u})$. Giả sử trái lại rằng, tồn tại tập mở V chứa $\mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$, sao cho, với mọi $u^n \to \bar{u}$, $\omega^n \to 0_+$ và $\delta^n \to 0_+$, tồn tại $H^n \in \mathcal{Q}(\delta^n, \omega^n, u^n)$ sao cho, với mọi n, $H^n \notin V$. Vì $H^n \in \mathcal{Q}(\delta^n, \omega^n, u^n)$ nên ta có $H^n \in A \cap (K(H^n) + \omega^n B^\Pi)$ đồng thời tồn tại $t^n \in T(H^n, u^n)$ sao cho, với mọi $F \in A \cap (K(H^n) + \omega^n B^\Pi)$,

$$\langle t^n, F - H^n \rangle + \delta^n \geq 0. \tag{4.3}$$

Từ tính compắc của A, tồn tại dãy con, được ký hiệu lại là H^n, hội tụ đến $\bar{H} \in A$. Chúng ta có thể khẳng định $K(\cdot) + .B^\Pi$ là nửa liên tục trên tại $(\bar{H}, 0)$. Thật vậy, giả sử ngược lại rằng tồn tại tập mở $V_1 \supseteq K(\bar{H})$, $H'^n \to \bar{H}$ và $\omega^n \to 0_+$ sao cho, tồn tại $F^n \in A \cap (K(H'^n) + \omega^n B^\Pi)$ (nghĩa là, $F^n = G^n + \omega^n e^n$ với các dãy $G^n \in K(H'^n)$ và

$e^n \in B^{\Pi}$) mà $F^n \notin V_1$ với mọi n. Bởi vì $K(\cdot)$ là nửa liên tục trên và $K(\bar{H})$ compắc, áp dụng Định lý 1.3.11, $G^n \to \bar{G} \in K(\bar{H})$. Dễ dàng thấy rằng $\omega^n e^n \to 0_{\mathbb{B}^m}$. Do đó, $F^n \to \bar{G} \in K(\bar{H}) \subseteq V_1$, là điều mâu thuẫn. Do đó, $K(\cdot) + .B^{\Pi}$ là nửa liên tục trên tại $(\bar{H}, 0)$. Sử dụng tính đóng của $K(\cdot) + .B^{\Pi}$, $\bar{H} \in K(\bar{H})$. Tương tự ta có dãy t^n hội tụ về $\bar{t} \in T(\bar{H}, \bar{u})$.

Giả sử rằng $\bar{H} \notin \mathcal{Q}(0, 0, \bar{u})$, nghĩa là với mọi $t \in T(\bar{H}, \bar{u})$, tồn tại $\bar{F} \in K(\bar{H})$ sao cho

$$\langle t, \bar{F} - \bar{H} \rangle < 0.$$

Áp dụng tính nửa liên tục dưới của $K(\cdot)$ tại $\bar{H}$, dễ dàng chứng minh được $K(\cdot) + .B^{\Pi}$ là nửa liên tục dưới tại $(\bar{H}, 0)$. Với $\bar{F}$ ở trên, tồn tại $F^n \in A \cap (K(H^n) + \omega^n B^{\Pi})$ sao cho $F^n \to \bar{F}$. Thế F^n cho F trong công thức (4.3) và lấy giới hạn, ta có

$$\langle \bar{t}, \bar{F} - \bar{H} \rangle \geq 0,$$

là điều vô lý. Do đó, $\bar{H} \in \mathcal{Q}(0, 0, \bar{u})$, điều này lại mâu thuẫn với giả thiết $H^n \notin V$ với mọi n. Vậy $\mathcal{Q}(\cdot, \cdot, \cdot)$ là nửa liên tục trên tại $(0, 0, \bar{u})$.

Kế đến ta cần kiểm tra $\mathcal{Q}(0, 0, \bar{u})$ là tập compắc. Vì $\mathcal{Q}(0, 0, \bar{u})$ chứa trong tập compắc nên chúng ta chỉ cần kiểm tra tính đóng của $\mathcal{Q}(0, 0, \bar{u})$. Xét $H^n \in \mathcal{Q}(0, 0, \bar{u})$, tức là $H^n \in K(H^n)$ và tồn tại $t^n \in T(H^n, \bar{u})$ sao cho, với mọi $F \in K(H^n)$,

$$\langle t^n, F - H^n \rangle \geq 0. \tag{4.4}$$

Giả sử rằng $H^n \to \bar{H}$. Áp dụng Định lý 1.3.11, $\bar{H} \in K(\bar{H})$ và, sử dụng dãy con nếu cần thiết, ta có $t^n \to \bar{t} \in T(\bar{H}, \bar{u})$. Giả sử trái lại rằng $\bar{H} \notin \mathcal{Q}(0, 0, \bar{u})$. Khi đó, với mọi $t \in T(\bar{H}, \bar{u})$, tồn tại $\bar{F} \in K(\overline{H})$ sao cho

$$\langle t, \bar{F} - \bar{H} \rangle < 0.$$

Áp dụng tính nửa liên tục dưới của $K(\cdot)$ tại $\bar{H}$, tồn tại $F^n \in K(H^n)$ sao cho $F^n \to \bar{F}$. Thế F^n cho F trong công thức (4.4) và lấy giới hạn, ta có

$$\langle \bar{t}, \overline{F} - \overline{H} \rangle \geq 0,$$

là vô lý. Suy ra $\mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$ đóng.

Cuối cùng, áp dụng Định lý 1.3.11, kết hợp tính nửa liên tục trên của $\mathcal{Q}(\cdot,\cdot,\cdot)$ và tính compắc của $\mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$ ta có $\{\mathrm{QVI}(T,K)_U\}$ đặt chỉnh tại $\bar{u}$.

Trong trường hợp đặc biệt, khi tập nghiệm $\mathcal{Q}(0,0,\bar{u}) = \{\bar{H}\}$, Định lý 1.3.11 chỉ ra rằng dãy $H^n \to \bar{H}$. Do đó, $\{\mathrm{QVI}(T,K)_U\}$ đặt chỉnh duy nhất tại $\bar{u}$. □

Ta có nhận xét rằng Định nghĩa 4.3.1 về dãy xấp xỉ mở rộng các định nghĩa về dãy xấp xỉ trong các bài viết [3, 28, 46], Định nghĩa 4.3.2 tổng quát hơn các định nghĩa tương ứng trong [28] và [46]. Mệnh đề 2.9 trong [47] về tính đặt chỉnh của bất đẳng thức biến phân với hàm đơn trị T có giả thiết khác các giả thiết trong Định lý 4.3.3. Các định lý 9 và 10 của [28], các định lý 4.1 và 4.2 của [46] về tính đặt chỉnh cho tựa bất đẳng thức biến phân tương tự Định lý 4.3.3 trong trường hợp đặc biệt khi hàm giá đơn trị. Hơn nữa, kỹ thuật chứng minh của chúng tôi là khác so với các kết quả trên.

Sau đây chúng ta thiết lập tính đặt chỉnh cho mạng giao thông có tham số.

Định nghĩa 4.3.4. *H^n được gọi là dãy xấp xỉ của $\mathrm{TNP}(T,\rho)_{\bar{u}}$ tương ứng với dãy $u^n \to \bar{u}$ nếu tồn tại các dãy ω^n và e^n cùng hội tụ đến 0_+, với $0 \le e^n \le \frac{1}{2}\min_{s=1,\dots,m}\{\gamma_s\}$, sao cho $H^n \in A \cap (K(H^n) + \omega^n B^{\Pi})$ và, với mọi $W_j, j = 1,\dots,l$, và mọi $q,s \in P_j$, tồn tại $t^n \in T(H^n,u^n)$ thỏa mãn*

$$t_q^n < t_s^n \Longrightarrow H_q^n \in [\gamma_q - e^n, \gamma_q] \text{ hoặc } H_s^n \in [0, e^n].$$

Định nghĩa 4.3.5. $\{\mathrm{TNP}(T,\rho)_U\}$ *được gọi là đặt chỉnh (đặt chỉnh duy nhất tương ứng) tại $\bar{u}$ nếu*

(a) *Tập nghiệm $\mathcal{T}(0,0,\bar{u})$ của $\mathrm{TNP}(T,\rho)_{\bar{u}}$ khác rỗng (duy nhất nghiệm tương ứng);*

(b) *Với mỗi dãy $u^n \to \bar{u}$, mỗi dãy xấp xỉ của $\mathrm{TNP}(T,\rho)_{\bar{u}}$ tương ứng với u^n có dãy con hội tụ về phần tử (hội tụ về nghiệm duy nhất tương ứng) của $\mathcal{T}(0,0,\bar{u})$.*

Điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh theo tham số của $\{\mathrm{TNP}(T,\rho)_U\}$ được cho bởi định lý sau.

Định lý 4.3.6. *Giả sử rằng ρ là liên tục trên A và $T(\cdot,\cdot)$ là nửa liên tục trên với giá trị compắc trên $A \times \{\bar{u}\}$. Khi đó, $\{\mathrm{TNP}(T,\rho)_U\}$ là đặt chỉnh tại $\bar{u}$. Hơn nữa, nếu $\mathcal{T}(0,0,\bar{u})$ là duy nhất nghiệm, thì $\{\mathrm{TNP}(T,\rho)_U\}$ là đặt chỉnh duy nhất.*

Chứng minh. Cho u^n tùy ý hội tụ đến $\bar{u}$. Xét dãy xấp xỉ của $\mathrm{TNP}(T,\rho)_{\bar{u}}$ tương ứng với dãy u^n, nghĩa là tồn tại các dãy ω^n và e^n, cùng hội tụ về 0_+, với $0 \le e^n \le \frac{1}{2}\min_{s=1,\dots,m}\{\gamma_s\}$, sao cho $H^n \in A \cap (K(H^n) + \omega^n B^{\Pi})$ và, với mọi $W_j, j = 1,\dots,l$, và với mọi $q, s \in P_j$, tồn tại $t^n \in T(H^n, u^n)$ sao cho

$$t_q^n < t_s^n \Longrightarrow H_q^n \in [\gamma_q - e^n, \gamma_q] \text{ hoặc } H_s^n \in [0, e^n].$$

Do đó, $H^n \in \mathcal{T}(e^n,\omega^n,\bar{u})$ và $\mathcal{T}(e^n,\omega^n,\bar{u})$ là tập con của $\mathcal{Q}(m\kappa(2\omega^n + e^n),\omega^n,\bar{u})$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ bởi Mệnh đề 4.2.9. Áp dụng Định lý 4.3.3, họ bài toán tương ứng $\{\mathrm{QVI}(T,K)_U\}$ đặt chỉnh tại $\bar{u}$. Do đó, tồn tại dãy con $H^{n_k} \to \bar{H} \in \mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$.
Áp dụng Bổ đề 2.4.1, $\bar{H} \in \mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$ suy ra $\bar{H}$ là dòng cân bằng. Do đó, $H^{n_k} \to \bar{H} \in \mathcal{T}(0,0,\bar{u})$. Vậy $\{\mathrm{TNP}(T,\rho)_U\}$ đặt chỉnh tại $\bar{u}$.

Trong trường hợp đặc biệt, với $\mathcal{T}(0,0,\bar{u})$ là duy nhất nghiệm, thì $\{\mathrm{TNP}(T,\rho)_U\}$ đặt chỉnh duy nhất tại $\bar{u}$. $\square$

Nhận xét 4.3.7. Tính đặt chỉnh của mạng giao thông sẽ kéo theo tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm. Thật vậy nếu $\{\mathrm{TNP}(T,\rho)_U\}$ đặt chỉnh tại $(0,0,\bar{u})$, thì tập nghiệm $\mathcal{T}(\cdot,\cdot,\cdot)$ đồng thời nửa liên tục trên Hausdroff và nửa liên tục tại $(0,0,\bar{u})$. Giả sử $\mathcal{T}(\cdot,\cdot,\cdot)$ không nửa liên tục trên Hausdroff tại $(0,0,\bar{u})$. Khi đó, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho với mỗi dãy $u^n \to \bar{u}$, $\omega^n \to 0_+$ và $e^n \to 0_+$, tồn tại $H^n \in \mathcal{T}(e^n,\omega^n,u^n)$ mà $H^n \notin B(\mathcal{T}(0,0,\bar{u}),\epsilon)$ với mọi n, ở đó $B(a,r)$ là hình cầu mở tâm a bán kính r. Mặt khác H^n là dãy xấp xỉ của $\mathrm{TNP}(T,\rho)_{\bar{u}}$ nhưng không có dãy con nào hội tụ đến một điểm nào đó thuộc $\mathcal{T}(0,0,\bar{u})$. Điều này mâu thuẫn với định nghĩa của tính đặt chỉnh, do đó $\mathcal{T}(\cdot,\cdot,\cdot)$ nửa liên tục trên Hausdroff tại $(0,0,\bar{u})$. Hơn nữa, vì $\mathcal{T}(0,0,\bar{u})$ compắc nên $\mathcal{T}(\cdot,\cdot,\cdot)$ nửa liên tục trên tại $(0,0,\bar{u})$.

Trong [2], tính nửa liên tục cho ánh xạ nghiệm của mạng giao thông có tham số được nghiên cứu trong trường hợp $\omega = 0$, hàm giá T phụ thuộc vào tham số $u \in U$

và $\rho(H)$ cũng phụ thuộc vào tham số v khác. Lưu ý rằng trong trường hợp $\rho(H)$ không phụ thuộc vào v, Hệ quả 5.5 trong [2] là yếu hơn tính nửa liên tục trên trong phần đầu của nhận xét. Hơn nữa, kết quả này cũng mạnh hơn Hệ quả 3.9 của [1] nếu $\omega(H)$ được xét trong [1] là hàm hằng.

Kết luận

- Nội dung chính của Chương 4 gồm: các điều kiện đủ cho tính duy nhất nghiệm và các cận sai số của các dòng chấp nhận được của giao thông (các Định lý 4.1.5 và 4.1.6), mối quan hệ giữa dòng cân bằng xấp xỉ của mạng giao thông và nghiệm xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị (các Mệnh đề 4.2.3, 4.2.5, 4.2.9 và 4.2.11), các điều kiện đủ về tính đặt chỉnh Tikhonov theo nghĩa Levitin-Polyak cho mạng giao thông có tham số (Định lý 4.3.6) và cho bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị có tham số (Định 4.3.3).

- Hướng phát triển của chương này là nghiên cứu tính ổn định theo nghĩa định lượng, cụ thể như đánh giá độ nhạy nghiệm (xem [62]), cho các bài toán trên. Các hướng phát triển khác rất được quan tâm hiện nay là xét tính đặt chỉnh và cận sai số cho mạng giao thông với ràng buộc tải năng trên cung.

Chương 5

TÍNH LIÊN THÔNG CỦA CÁC TẬP NGHIỆM XẤP XỈ CỦA BẤT ĐẲNG THỨC KY FAN ĐA TRỊ

Chương 5 thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên thông của tập nghiệm xấp xỉ và tập nghiệm yếu xấp xỉ của bất đẳng thức Ky Fan đa trị.

Mục 5.1 xét vô hướng hóa tuyến tính cho tập nghiệm yếu xấp xỉ của bất đẳng thức Ky Fan đa trị dưới giả thiết lồi suy rộng. Mục 5.2 thiết lập điều kiện đủ cho tính trù mật của tập nghiệm xấp xỉ. Điều kiện đủ cho tính liên thông của tập nghiệm xấp xỉ và tập nghiệm yếu xấp xỉ được trình bày trong Mục 5.4 và ví dụ minh họa cho các kết quả trên được trình bày ở phần cuối của mục này.

Chương này được viết trên cơ sở bài báo [KS3]. Các kết quả chính được trình bày trong chương này mở rộng một số kết quả tương ứng trong [20, 21, 22, 63] về tính chất liên thông cho các tập nghiệm của các bất đẳng thức Ky Fan véctơ và mở rộng một số kết quả tương ứng trong [25, 26] cho các tập nghiệm và các tập nghiệm xấp xỉ của bất đẳng thức Ky Fan đa trị.

5.1 Bất đẳng thức Ky Fan đa trị

Trong chương này, chúng ta xét X, Y, Z là các không gian định chuẩn, $C \subseteq Y$ là một nón lồi nhọn với phần trong $\mathrm{int}C \neq \emptyset$. Cho Y^* là không gian tôpô đối ngẫu của Y, và

$$C^* := \{\xi \in Y^* | \langle \xi, y \rangle \geq 0, \forall y \in C\}$$

là nón đối ngẫu của nón C. Nón đối ngẫu chặt của C được cho bởi

$$C^\sharp := \{\xi \in Y^* | \langle \xi, y \rangle > 0, \forall y \in C \setminus \{0_Y\}\}.$$

Trong [23], $C^\sharp \neq \emptyset$ nếu và chỉ nếu C có đáy lồi. Chúng ta cũng biết rằng nếu $\xi \in C^*$ là một hàm khác không, thì $\langle \xi, y \rangle > 0$ với mọi $y \in \text{int}C$.

Cho $A \subseteq X, B \subseteq Z$ là các tập con khác rỗng và một ánh xạ đa trị $F : X \times Z \rightrightarrows Y$. Chúng ta xét bất đẳng thức Ky Fan đa trị sau:

KFI(F, A, B) tìm $\bar{x} \in A$ sao cho, với mọi $z \in B$,

$$F(\bar{x}, z) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

Ký hiệu $\mathcal{K}$ là tập nghiệm của KFI(F, A, B) (còn được biết với tên khác là tập nghiệm hữu hiệu của KFI(F, A, B)). Nếu $\bar{x} \in A$ thỏa, với mọi $z \in B$,

$$F(\bar{x}, z) \cap (-\text{int}C) = \emptyset,$$

thì $\bar{x}$ được gọi là một nghiệm yếu của KFI(F, A, B) và $\mathcal{K}^w$ là tập nghiệm yếu của KFI(F, A, B).

Với mỗi điểm cố định $e \in \text{int}C$ và $\epsilon \geq 0$,

$$\mathcal{K}(\epsilon) := \{x \in A | (F(x, z) + \epsilon e) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset, \forall z \in B\} \text{ và}$$

$$\mathcal{K}^w(\epsilon) := \{x \in A | (F(x, z) + \epsilon e) \cap (-\text{int}C) = \emptyset, \forall z \in B\}$$

lần lượt là tập nghiệm xấp xỉ và tập nghiệm yếu xấp xỉ của KFI(F, A, B) tương ứng với ϵ.

Với mỗi $\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$,

$$\mathcal{K}(\epsilon, \xi) := \{x \in A| \ \langle \xi, F(x, z) \rangle + \epsilon \subseteq \mathbb{R}_+, \forall z \in B\}$$

là tập nghiệm xấp xỉ của bất đẳng thức Ky Fan vô hướng tương ứng với KFI(F, A, B) và ξ.

Chương này chỉ tập trung vào việc thiết lập tính chất liên thông của tập nghiệm xấp xỉ, tập nghiệm yếu xấp xỉ và tập nghiệm chính xác tương ứng của KFI(F, A, B) nên chúng ta luôn giả sử rằng $\mathcal{K}(0, \xi) \neq \emptyset$ với mọi $\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$. Các ký hiệu $C_e^* := \{\xi \in C^* | \langle \xi, e\rangle = 1\}$ và $C_e^\sharp := \{\xi \in C^\sharp | \langle \xi, e\rangle = 1\}$ sẽ được sử dụng thường xuyên trong chương này.

5.2 Vô hướng hóa tuyến tính cho tập nghiệm yếu xấp xỉ

Trong mục này chúng ta thiết lập vô hướng hóa cho tập nghiệm yếu xấp xỉ của KFI(F, A, B).

Định lý 5.2.1. *Xét* KFI(F, A, B). *Với mỗi $\epsilon \geq 0$ và $e \in \mathrm{int}C$, giả sử rằng $F(x, \cdot)$ là C-dưới giống lồi trên B với mỗi $x \in A$. Khi đó,*

$$\mathcal{K}^w(\epsilon) = \bigcup_{\xi \in C_e^*} \mathcal{K}(\epsilon, \xi).$$

Chứng minh. Với mỗi $x \in \mathcal{K}^w(\epsilon)$, ta có

$$(F(x, B) + \epsilon e) \cap (-\mathrm{int}C) = \emptyset.$$

Vì $\mathrm{int}C$ là một nón mở nên

$$\mathrm{cl}(F(x, B) + C + \epsilon e) \cap (-\mathrm{int}C) = \emptyset. \tag{5.1}$$

Hơn nữa,

$$\mathrm{cl}(F(x, B) + C + \epsilon e) = \mathrm{cl}(F(x, B) + C) + \epsilon e. \tag{5.2}$$

Do đó, $\mathrm{cl}(F(x, B) + C + \epsilon e)$ là một tập lồi. Áp dụng định lý tách cho (5.1), khi đó tồn tại $y^* \in Y^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ và $r \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\langle y^*, y\rangle \geq r, \forall y \in \mathrm{cl}(F(x, B) + C + \epsilon e). \tag{5.3}$$

$$\langle y^*, s\rangle < r, \forall s \in -\mathrm{int}C. \tag{5.4}$$

Bởi vì $s \in -\text{int}C$ có thể chọn gần 0 tùy ý, từ biểu thức (5.4) ta có $r \geq 0$ và $y^* \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$. Do $0 \in C$ và $w + \epsilon e \in \text{cl}(F(x, B) + C + \epsilon e)$ với mọi $w \in F(x, B)$, biểu thức (5.3) suy ra

$$\langle y^*, w \rangle + \langle y^*, \epsilon e \rangle \geq 0, \forall w \in F(x, B).$$

Mặt khác $\langle y^*, e \rangle > 0$, ta đặt $\xi = \frac{y^*}{\langle y^*, e \rangle}$, khi đó ta có $\xi \in C^*_e$ và

$$\langle \xi, F(x, z) \rangle + \epsilon \subseteq \mathbb{R}_+, \forall z \in B.$$

Điều này chỉ ra rằng

$$x \in \bigcup_{\xi \in C^*_e} \mathcal{K}(\epsilon, \xi).$$

Với mỗi $x \in \bigcup_{\xi \in C^*_e} \mathcal{K}(\epsilon, \xi)$, tồn tại $\xi \in C^*_e$ sao cho, với mọi $z \in B$,

$$\langle \xi, F(x, z) \rangle + \epsilon \subseteq \mathbb{R}_+. \tag{5.5}$$

Giả sử $x \notin \mathcal{K}^w(\epsilon)$. Khi đó, tồn tại $\bar{z} \in B$ sao cho, với mỗi $w \in F(x, \bar{z})$,

$$w + \epsilon e \in -\text{int}C,$$

và do đó

$$\langle \xi, w \rangle + \epsilon < 0,$$

điều này mâu thuẫn với (5.5). Ta có điều cần chứng minh. □

Nhận xét 5.2.2. Định lý 5.2.1 trùng với Định lý 3.2 trong [66] khi F là ánh xạ đơn trị. Định lý 5.2.1 mở rộng Định lý 4.1 trong [63]. Trong trường hợp $\epsilon = 0$, Định lý 5.2.1 mở rộng Định lý 3.1(iii) trong [25], Định lý 5.2.1 mở rộng Định lý 2.1 trong [20] khi F là ánh xạ đơn trị. Bởi vì chúng tôi chỉ dùng giả thiết C-dưới giống lồi thay vì giả thiết C-lồi hoặc C-giống lồi được sử dụng trong các kết quả đó.

5.3 Tính nửa liên tục dưới và tính trù mật

Trước tiên, chúng ta thiết lập tính nửa liên tục dưới cho ánh xạ đa trị $\mathcal{K}(\epsilon, \xi)$ ứng với ϵ với mỗi $\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ và ứng với ξ với mỗi $\epsilon \geq 0$.

Định lý 5.3.1. *Xét* KFI(F, A, B). *Giả sử rằng* A *là lồi và* $F(\cdot, z)$ *là* C*-lõm trên* A *với mỗi* $z \in B$. *Khi đó,*

(a) $\mathcal{K}(\cdot, \xi)$ *là nửa liên tục dưới trên* $(0, +\infty)$ *với mỗi* $\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$;

(b) $\mathcal{K}(\cdot, \xi)$ *là nửa liên tục dưới tại 0 với mỗi* $\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ *nếu tồn tại một nghiệm chặt* x *của* KFI(F, A, B) *theo nghĩa, tồn tại* $y_0 \in \mathrm{int}C$ *và mọi* $z \in B$,

$$F(x, z) + y_0 \subseteq \mathrm{int}C. \tag{5.6}$$

Chứng minh. Chúng ta sử dụng kỹ thuật phản chứng.

(a) Giả sử ngược lại rằng $\mathcal{K}(\cdot, \xi)$ không là nửa liên tục dưới tại $\epsilon^0 > 0$. Khi đó tồn tại $\bar{x} \in \mathcal{K}(\epsilon^0, \xi)$ và một lân cận O_0 của $0_X \in X$ sao cho tồn tại một dãy ϵ^n với $\epsilon^n \to \epsilon^0$ thỏa mãn

$$(\bar{x} + O_0) \cap \mathcal{K}(\epsilon^n, \xi) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Chúng ta lưu ý rằng nếu $\epsilon^0 \leq \epsilon^n$ thì $\bar{x} \in \mathcal{K}(\epsilon^0, \xi) \subseteq \mathcal{K}(\epsilon^n, \xi)$ mẫu thuẫn với (5.7). Xét $\epsilon^0 > \epsilon^n$. Ta chọn $\hat{x} \in \mathcal{K}(0, \xi)$ và ϵ^{n_0} sao cho

$$\frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\bar{x} + \frac{\epsilon^0 - \epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\hat{x} \in \bar{x} + O_0. \tag{5.8}$$

Chúng ta cần chứng minh $\frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\bar{x} + \frac{\epsilon^0 - \epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\hat{x} \in \mathcal{K}(\epsilon^{n_0}, \xi)$. Thật vậy, vì $\bar{x} \in \mathcal{K}(\epsilon^0, \xi)$ và $\hat{x} \in \mathcal{K}(0, \xi)$, với mỗi $z \in B$, ta có $\langle \xi, F(\bar{x}, z) \rangle + \epsilon^0 \subseteq \mathbb{R}_+$ và $\langle \xi, F(\hat{x}, z) \rangle \subseteq \mathbb{R}_+$. Khi đó, với mỗi $u \in F(\bar{x}, z)$,

$$\frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\langle \xi, u \rangle + \epsilon^{n_0} \geq 0 \tag{5.9}$$

và, với mỗi $v \in F(\hat{x}, z)$,

$$\frac{\epsilon^0 - \epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\langle \xi, v \rangle \geq 0. \tag{5.10}$$

Từ tính chất C-lõm của $F(\cdot, z)$,

$$F(\frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\bar{x} + \frac{\epsilon^0 - \epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\hat{x}, z) \subseteq \frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}F(\bar{x}, z) + \frac{\epsilon^0 - \epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}F(\hat{x}, z) + C.$$

Điều này dẫn đến, với mỗi $w \in F(\frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\bar{x} + \frac{\epsilon^0 - \epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\hat{x}, z)$, tồn tại $\bar{u} \in F(\bar{x}, z)$, $\hat{v} \in F(\hat{x}, z)$ và $\bar{c} \in C$ sao cho $w = \frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\bar{u} + \frac{\epsilon^0 - \epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\hat{v} + \bar{c}$. Từ tính chất tuyến tính của ξ, ta có

$$\langle \xi, w \rangle - \frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\langle \xi, \bar{u} \rangle - \frac{\epsilon^0 - \epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\langle \xi, \hat{v} \rangle = \langle \xi, \bar{c} \rangle \geq 0.$$

Từ (5.9) và (5.10),

$$\langle \xi, w\rangle \geq -\epsilon^{n_0}.$$

Suy ra

$$\langle \xi, F(\frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\bar{x} + \frac{\epsilon^0 - \epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\hat{x}, z)\rangle + \epsilon^{n_0} \subseteq \mathbb{R}_+,$$

nghĩa là $\frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\bar{x} + \frac{\epsilon^0-\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\hat{x} \in \mathcal{K}(\epsilon^{n_0}, \xi)$. Khi đó (5.8) kéo theo $\frac{\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\bar{x} + \frac{\epsilon^0-\epsilon^{n_0}}{\epsilon^0}\hat{x} \in (\bar{x}+O_0)\cap \mathcal{K}(\epsilon^{n_0}, \xi)$, điều này mâu thuẫn với (5.7).

(b) Giả sử ngược lại rằng $\mathcal{K}(\cdot, \xi)$ không là nửa liên tục dưới tại 0. Khi đó, tồn tại $\tilde{x} \in \mathcal{K}(0, \xi)$ và một lân cận O_0 của $0_X \in X$ sao cho tồn tại một dãy ϵ^n với $\epsilon^n \to 0$ thỏa mãn

$$(\tilde{x} + O_0) \cap \mathcal{K}(\epsilon^n, \xi) = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.11}$$

Từ (5.6), tồn tại $y_0 \in -\text{int}C$ và $x \in A$ sao cho $F(x, B) + y_0 \subseteq C$. Do đó

$$\langle \xi, F(x, B)\rangle + \langle \xi, y_0\rangle \subseteq \mathbb{R}_+$$

và tồn tại $r > 0$ sao cho

$$2r\mathbb{B}(0, 1) - y_0 \subseteq C. \tag{5.12}$$

Xét

$$t = -\inf_{y\in r\mathbb{B}(0,1)} \langle \xi, y\rangle > 0. \tag{5.13}$$

Vì $\epsilon^n \to 0$, tồn tại $\epsilon^{n_0} \in [-t, t]$ sao cho

$$\frac{t}{t + |\epsilon^{n_0}|}\tilde{x} + \frac{|\epsilon^{n_0}|}{t + |\epsilon^{n_0}|}x \in \tilde{x} + O_0. \tag{5.14}$$

Chúng ta cần chứng minh $\frac{t}{t+|\epsilon^{n_0}|}\tilde{x} + \frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}x \in \mathcal{K}(\epsilon^{n_0}, \xi)$. Thật vậy, vì $\tilde{x} \in \mathcal{K}(0, \xi)$ và $x \in \mathcal{K}(\langle \xi, y_0\rangle, \xi)$, với mỗi $z \in B$, ta có $\langle \xi, F(\tilde{x}, z)\rangle \subseteq \mathbb{R}_+$ và $\langle \xi, F(x, z)\rangle + \langle \xi, y_0\rangle \subseteq \mathbb{R}_+$. Khi đó, với mỗi $u \in F(\tilde{x}, z)$,

$$\frac{t}{t + |\epsilon^{n_0}|}\langle \xi, u\rangle \geq 0 \tag{5.15}$$

và, với mỗi $v \in F(x, z)$,

$$\frac{|\epsilon^{n_0}|}{t + |\epsilon^{n_0}|}\langle \xi, v\rangle + \frac{|\epsilon^{n_0}|}{t + |\epsilon^{n_0}|}\langle \xi, y_0\rangle \geq 0. \tag{5.16}$$

Theo tính chất C-lõm của ánh xạ $F(\cdot, y)$,

$$F(\frac{t}{t+|\epsilon^{n_0}|}\tilde{x}+\frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}x,z)\subseteq \frac{t}{t+|\epsilon^{n_0}|}F(\tilde{x},z)+\frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}F(x,z)+C.$$

Suy ra với mỗi $w\in F(\frac{t}{t+|\epsilon^{n_0}|}\tilde{x}+\frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}x,z)$ tồn tại $\tilde{u}\in F(\tilde{x},z)$, $\check{v}\in F(x,z)$ và $\bar{c}\in C$ sao cho $w=\frac{t}{t+|\epsilon^{n_0}|}\tilde{u}+\frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}\check{v}+\bar{c}$. Từ tính chất tuyến tính của ξ,

$$\langle \xi, w\rangle - \frac{t}{t+|\epsilon^{n_0}|}\langle \xi,\tilde{u}\rangle - \frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}\langle \xi,\check{v}\rangle = \langle \xi,\bar{c}\rangle \geq 0.$$

Theo các biểu thức (5.12) và (5.13),

$$\epsilon^{n_0} \geq \frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}\langle \xi, y_0\rangle. \tag{5.17}$$

Theo (5.15), (5.16) và (5.17),

$$\langle \xi, w\rangle \geq -\frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}\langle \xi, y_0\rangle \geq -\epsilon^{n_0}.$$

Suy ra

$$\langle \xi, F(\frac{t}{t+|\epsilon^{n_0}|}\tilde{x}+\frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}x,z)\rangle + \epsilon^{n_0} \subseteq \mathbb{R}_+,$$

nghĩa là $\frac{t}{t+|\epsilon^{n_0}|}\tilde{x}+\frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}x \in \mathcal{K}(\epsilon^{n_0},\xi)$. Từ biểu thức (5.14) ta có $\frac{t}{t+|\epsilon^{n_0}|}\tilde{x}+\frac{|\epsilon^{n_0}|}{t+|\epsilon^{n_0}|}x \in (\bar{x}+O_0)\cap\mathcal{K}(\epsilon^{n_0},\xi)$, điều này mẫu thuẫn với (5.11). $\square$

Định lý 5.3.2. *Xét* KFI(F,A,B). *Giả sử rằng các điều kiện sau thỏa mãn.*

(i) *A là lồi và $F(\cdot,z)$ là C-lõm trên A với mỗi $z\in B$;*

(ii) *$F(x,\cdot)$ là C-dưới giống lồi trên B với mỗi $x\in A$ và $F(A,B)$ bị chặn;*

(iii) *tồn tại một nghiệm chặt x của* KFI(F,A,B) *theo nghĩa, tồn tại $y_0\in \mathrm{int}C$ và mọi $z\in B$, $F(x,z)+y_0\subseteq \mathrm{int}C$.*

Khi đó, $\mathcal{K}(\epsilon,\cdot)$ là nửa liên tục dưới trên $C^*\setminus\{0_{Y^*}\}$ (với tôpô chuẩn trong C^*) với $\epsilon\geq 0$.

Chứng minh. Giả sử ngược lại rằng $\mathcal{K}(\epsilon,\cdot)$ không là nửa liên tục dưới tại ξ^0. Khi đó, tồn tại $x_0\in\mathcal{K}(\epsilon,\xi^0)$ và một lân cận W_0 của 0_X sao cho tồn tại một dãy ξ^n với $\xi^n\to\xi^0$ thỏa mãn

$$(x_0+W_0)\cap\mathcal{K}(\epsilon,\xi^n)=\emptyset, \forall n\in\mathbb{N}. \tag{5.18}$$

Chúng ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1: $\epsilon > 0$. Theo Định lý 5.3.1(a), tính chất nửa liên tục dưới của $\mathcal{K}(\cdot, \xi^0)$ tại ϵ chỉ ra rằng tồn tại một lân cận V_0 của ϵ sao cho

$$(x_0 + W_0) \cap \mathcal{K}(\epsilon', \xi^0) \neq \emptyset, \forall \epsilon' \in V_0.$$

Xét $\epsilon' \in V_0$ sao cho $0 < \epsilon' < \epsilon$ và x' thỏa mãn

$$x' \in (x_0 + W_0) \cap \mathcal{K}(\epsilon', \xi^0). \tag{5.19}$$

Ta chọn ξ^{n_0} thỏa $\|\xi^{n_0} - \xi^0\| < (\epsilon - \epsilon')T^{-1}$, ở đó $T > \sup_{w \in F(A,B)} \|w\|$ được xác định bởi (ii). Chúng ta chứng minh rằng $x' \in \mathcal{K}(\epsilon, \xi^{n_0})$. Theo (5.19), với mỗi $z \in B$,

$$\langle \xi^0, F(x', z) \rangle + \epsilon' \subseteq \mathbb{R}_+. \tag{5.20}$$

Với mỗi $w \in F(x', z)$, ta có

$$|\langle \xi^{n_0}, w \rangle - \langle \xi^0, w \rangle| \leq \|\xi^{n_0} - \xi^0\|.\|w\| \leq (\epsilon - \epsilon')T^{-1}.T = \epsilon - \epsilon'.$$

Suy ra

$$\langle \xi^{n_0}, F(x', z) \rangle \subseteq \langle \xi^0, F(x', z) \rangle + [-\epsilon + \epsilon', \epsilon - \epsilon'],$$

Kết hợp điều này với (5.20) dẫn đến, $\forall z \in B$,

$$\langle \xi^{n_0}, F(x', z) \rangle + \epsilon \subseteq \langle \xi^0, F(x', z) \rangle + \epsilon' + \epsilon - \epsilon' + [-\epsilon + \epsilon', \epsilon - \epsilon'] \subseteq \mathbb{R}_+.$$

Suy ra, $x' \in \mathcal{K}(\epsilon, \xi^{n_0})$ và từ (5.19) $x' \in (x_0 + W_0) \cap \mathcal{K}(\epsilon, \xi^{n_0})$, điều này mâu thuẫn với (5.18).

Trường hợp 2: $\epsilon = 0$. Theo Định lý 5.3.1(b), tính nửa liên tục dưới của $\mathcal{K}(\cdot, \xi^0)$ tại 0 chỉ ra rằng tồn tại một lân cận cân V_0 của 0 sao cho

$$(x_0 + W_0) \cap \mathcal{K}(\epsilon', \xi^0) \neq \emptyset, \forall \epsilon' \in V_0.$$

Xét $\epsilon' > 0$ thuộc V_0, x thỏa mãn

$$x \in (x_0 + W_0) \cap \mathcal{K}(-\epsilon', \xi^0) \tag{5.21}$$

và ξ^{n_0} sao cho

$$\|\xi^{n_0} - \xi^0\| < \epsilon' T^{-1}.$$

Chúng ta cần chứng minh $x \in \mathcal{K}(0, \xi^{n_0})$. Từ (5.21), với mỗi $z \in B$, ta có

$$\langle \xi^0, F(x,z)\rangle - \epsilon' \subseteq \mathbb{R}_+. \tag{5.22}$$

Với mỗi $w \in F(x,z)$,

$$|\langle \xi^{n_0}, w\rangle - \langle \xi^0, w\rangle| \leq \|\xi^{n_0} - \xi^0\|.\|w\| \leq \epsilon'$$

và do đó

$$\langle \xi^{n_0}, F(x,z)\rangle \subseteq \langle \xi^0, F(x,z)\rangle + [-\epsilon', \epsilon'],$$

Kết hợp với (5.22) ta có $\forall z \in B$,

$$\langle \xi^{n_0}, F(x,z)\rangle \subseteq \mathbb{R}_+.$$

Do đó, $x \in \mathcal{K}(0, \xi^{n_0})$. Theo biểu thức (5.21), ta có $x \in (x_0 + W_0) \cap \mathcal{K}(\epsilon, \xi^{n_0})$, điều này mẫu thuẫn với (5.18). Vậy, $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ là nửa liên tục dưới trên $C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$. □

Ta nhắc lại rằng, một hàm véctơ $g : X \to Y$ được gọi là C-nửa liên tục trên tại x nếu, với mỗi lân cận V của $g(x)$, tồn tại một lân cận U của x sao cho $g(U) \subseteq V - C$.

Hệ quả 5.3.3. *Xét* KFI(F, A, B). *Giả sử rằng F là đơn trị và các điều kiện sau đây thỏa*

(i) *A là lồi và compắc, và $F(\cdot, z)$ là C-lõm và C-nửa liên tục trên trên A với mỗi $z \in B$;*

(ii) *$F(x, \cdot)$ là C-dưới giống lồi trên B với mỗi $x \in A$ và $F(A, B)$ bị chặn;*

(iii) *tồn tại một nghiệm chặt x của* KFI(F, A, B) *theo nghĩa, tồn tại $y_0 \in \mathrm{int}C$ và mọi $z \in B$, $F(x, z) + y_0 \in \mathrm{int}C$.*

Khi đó, $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ là liên tục trên C^*_e với $\epsilon \geq 0$.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ là đóng trên C_e^* bởi vì A là compắc và $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ là nửa liên tục dưới trên C_e^* bởi Định lý 5.3.2. Xét dãy (ξ^n, x^n) thuộc đồ thị của $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ sao cho $(\xi^n, x^n) \to (\xi, x)$. Vì C_e^* và A là đóng, $(\xi, x) \in C_e^* \times A$. Bởi vì $x^n \in (\epsilon, \xi^n)$ ta có, với mọi $z \in B$,

$$\langle \xi^n, F(x^n, z)\rangle + \epsilon \geq 0.$$

Chúng ta biết rằng, $\sup_{u \in F(A,B)} |\langle \xi, u\rangle|$ là một nửa chuẩn của Y^*. Với mỗi $\delta > 0$,

$$U_\delta := \{\xi \in Y^* | \sup_{u \in F(A,B)} |\langle \xi, u\rangle| < \delta\}$$

là một lân cận của 0. Vì $\xi^n \to \xi$, có một chỉ số n_0 sao cho $\xi^n - \xi \in U_\delta$ với mọi $n \geq n_0$. Điều này dẫn đến, khi $n \geq n_0$,

$$\sup_{u \in F(A,B)} |\langle \xi^n - \xi, u\rangle| < \delta.$$

Do đó, khi $n \geq n_0$, với mỗi $z \in B$,

$$|\langle \xi^n - \xi, F(x^n, z)\rangle| = |\langle \xi^n, F(x^n, z)\rangle - \langle \xi, F(x^n, z)\rangle| < \delta.$$

Do đó, với mọi $z \in B$,

$$\lim_n \big(\langle \xi^n, F(x^n, z)\rangle - \langle \xi, F(x^n, z)\rangle\big) = 0.$$

Vì $F(\cdot, z)$ là C-nửa liên tục trên nên $x \mapsto \langle \xi, F(x, z)\rangle$ là nửa liên tục trên, suy ra

$$\text{limsup}_n \langle \xi, F(x^n, z)\rangle \leq \langle \xi, F(x, z)\rangle.$$

Ta có

$$\begin{aligned} -\epsilon &\leq \text{limsup}_n \langle \xi^n, F(x^n, z)\rangle \\ &\leq \text{limsup}_n (\langle \xi^n, F(x^n, z)\rangle - \langle \xi, F(x^n, z)\rangle) + \text{limsup}_n \langle \xi, F(x^n, z)\rangle \\ &\leq \langle \xi, F(x, z)\rangle. \end{aligned}$$

Do đó, $x \in \mathcal{K}(\epsilon, \xi)$. □

Tiếp theo chúng ta thiết lập tính trù mật cho tập nghiệm xấp xỉ của KFI(F, A, B)

Định lý 5.3.4. *Xét* $\mathrm{KFI}(F, A, B)$. *Giả sử các giả thiết của Định lý 5.3.2 thỏa mãn. Khi đó, với mỗi* $\epsilon > 0$,

$$\bigcup_{\xi \in C_e^\sharp} \mathcal{K}(\epsilon, \xi) \subseteq \mathcal{K}(\epsilon) \subseteq \mathrm{cl} \bigcup_{\xi \in C_e^\sharp} \mathcal{K}(\epsilon, \xi). \tag{5.23}$$

Hơn nữa,

$$\bigcup_{\xi \in C^\sharp} \mathcal{K}(0, \xi) \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathrm{cl} \bigcup_{\xi \in C^\sharp} \mathcal{K}(0, \xi).$$

Chứng minh. Từ định nghĩa, ta có

$$\bigcup_{\xi \in C_e^\sharp} \mathcal{K}(\epsilon, \xi) \subseteq \mathcal{K}(\epsilon) \subseteq \mathcal{K}^w(\epsilon). \tag{5.24}$$

Theo Định lý 5.2.1,

$$\mathcal{K}^w(\epsilon) = \bigcup_{\xi \in C_e^*} \mathcal{K}(\epsilon, \xi). \tag{5.25}$$

Từ (5.24) và (5.25), ta cần chứng minh, với mỗi $\epsilon > 0$,

$$\bigcup_{\xi \in C_e^*} \mathcal{K}(\epsilon, \xi) \subseteq \mathrm{cl}\big(\bigcup_{\xi \in C_e^\sharp} \mathcal{K}(\epsilon, \xi) \big).$$

Với mỗi $x \in \bigcup_{\xi \in C_e^*} \mathcal{K}(\epsilon, \xi)$, ta chọn $\xi \in C_e^*$ sao cho $x \in \mathcal{K}(\epsilon, \xi)$, $\zeta \in C_e^\sharp$, và $\xi^n = \frac{n-1}{n}\xi + \frac{1}{n}\zeta$. Khi đó, $\xi^n \in C^\sharp$ và $\langle \xi^n, e \rangle = 1$. Do đó, $\xi^n \in C_e^\sharp$. Bởi vì $\|\xi^n - \xi\| = \frac{1}{n}\|\zeta - \xi\|$, $\{\xi^n\}$ hội tụ đến ξ. Áp dụng Định lý 5.3.2, $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ là nửa liên tục dưới tại ξ. Do đó, với dãy $\xi^n \in C_e^\sharp$, $\xi^n \to \xi$ và $x \in \mathcal{K}(\epsilon, \xi)$, tồn tại $x^n \in \mathcal{K}(\epsilon, \xi^n) \subseteq \bigcup_{\xi \in C_e^\sharp} \mathcal{K}(\epsilon, \xi)$, sao cho $x^n \to x$. Điều này dẫn đến

$$x \in \mathrm{cl}\big(\bigcup_{\xi \in C_e^\sharp} \mathcal{K}(\epsilon, \xi) \big).$$

Chứng minh tương tự, theo Định lý 5.2.1,

$$\mathcal{K}^w = \bigcup_{\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}} \mathcal{K}(0, \xi).$$

Ta cần chứng minh

$$\bigcup_{\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}} \mathcal{K}(0, \xi) \subseteq \mathrm{cl} \bigcup_{\xi \in C^\sharp} \mathcal{K}(0, \xi).$$

Với mỗi $x_0 \in \bigcup_{\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}} \mathcal{K}(0,\xi)$, chọn $\xi_0 \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ sao cho $x_0 \in \mathcal{K}(0,\xi_0)$, $\zeta \in C^\sharp$ và $\xi^n = \xi_0 + \frac{1}{n}\zeta$. Khi đó, $\xi^n \in C^\sharp$. Bởi vì $\|\xi^n - \xi_0\| = \frac{1}{n}\|\zeta\|$, $\{\xi^n\} \to \xi_0$. Áp dụng Định lý 5.3.2, $\mathcal{K}(0,\cdot)$ là nửa liên tục dưới tại ξ_0. Do đó, tồn tại $x^n \in \mathcal{K}(0,\xi^n) \subseteq \bigcup_{\xi \in C^\sharp} \mathcal{K}(0,\xi)$ sao cho $x^n \to x$. Vậy

$$x_0 \in \mathrm{cl}\big(\bigcup_{\xi \in C^\sharp} \mathcal{K}(0,\xi)\big).$$

□

Nhận xét 5.3.5. Trong trường hợp đặc biệt khi $\epsilon = 0$ và F là ánh xạ đơn trị, Định lý 5.3.4 mở rộng Định lý 3.2 của [63] và Định lý 2.1 của [22] vì chúng tôi loại bỏ giả thiết compắc trên tập A và tính đơn điệu hoặc tính liên tục của ánh xạ F.

5.4 Tính liên thông của tập nghiệm xấp xỉ và tập nghiệm yếu xấp xỉ

Mục này thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên thông của tập nghiệm xấp xỉ và tập nghiệm yếu xấp xỉ của KFI(F, A, B).

Định lý 5.4.1. *Theo các giả thiết của Định lý 5.3.2, $\mathcal{K}(\epsilon)$ là liên thông với $\epsilon \geq 0$.*

Chứng minh. Trước hết, ta cần chứng minh $\mathcal{K}(\epsilon,\xi)$ là lồi với mỗi $\xi \in C^\sharp_e$ và $\epsilon \geq 0$. Xét $x_1, x_2 \in \mathcal{K}(\epsilon,\xi)$ và $\lambda \in [0,1]$. Khi đó $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$, $\langle \xi, F(x_1,z)\rangle + \epsilon \subseteq \mathbb{R}_+$ và $\langle \xi, F(x_2,z)\rangle + \epsilon \subseteq \mathbb{R}_+$ với mỗi $z \in B$. Từ tính chất C-lõm của $F(\cdot,z)$, ta có $\langle \xi, F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2, z)\rangle + \epsilon \subseteq \mathbb{R}_+$ và do đó $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \mathcal{K}(\epsilon,\xi)$. Do đó $\mathcal{K}(\epsilon,\xi)$ là lồi nên liên thông với mỗi $\xi \in C^\sharp_e$. Tiếp theo, từ Định lý 5.3.2, ta có $\mathcal{K}(\epsilon,\cdot)$ là nửa liên tục dưới trên $C^\sharp_e$. Áp dụng Định lý 1.3.12, ta có $\bigcup_{\xi \in C^\sharp_e} \mathcal{K}(\epsilon,\xi)$ là liên thông. Hơn nữa, từ Định lý 5.3.4 ta có

$$\bigcup_{\xi \in C^\sharp_e} \mathcal{K}(\epsilon,\xi) \subseteq \mathcal{K}(\epsilon) \subseteq \mathrm{cl} \bigcup_{\xi \in C^\sharp_e} \mathcal{K}(\epsilon,\xi)$$

và

$$\bigcup_{\xi \in C^\sharp} \mathcal{K}(0,\xi) \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathrm{cl} \bigcup_{\xi \in C^\sharp} \mathcal{K}(0,\xi).$$

Do đó, $\mathcal{K}(\epsilon)$ là liên thông. □

Nhận xét 5.4.2. Bởi vì chúng tôi đề xuất giả thiết C-dưới giống lồi thay cho giả thiết C-giống lồi, Định lý 5.4.1 mở rộng Định lý 3.4 trong [26] khi $A \equiv B$ và Định lý 4.2 trong [25] khi $\epsilon = 0$. Trong trường hợp đặc biệt khi F là đơn trị và $\epsilon = 0$, Định lý 5.4.1 mở rộng Định lý 3.5 trong [63] bởi vì chúng tôi loại bỏ được giả thiết compắc trên tập A và giảm nhẹ tính chất liên tục của hàm F đồng thời giả thiết C-giống lồi được thay bởi C-dưới giống lồi. Tương tự, Định lý 5.4.1 mở rộng Định lý 2.2 trong [22].

Định lý 5.4.3. *Giả sử các giả thiết được đưa ra trong Định lý 5.3.2 thỏa mãn. Khi đó, $\mathcal{K}^w(\epsilon)$ là liên thông với $\epsilon \geq 0$.*

Chứng minh. Với mỗi $\xi \in C_e^*$ và $\epsilon \geq 0$, $\mathcal{K}(\epsilon, \xi)$ là lồi nên liên thông. Từ Định lý 5.2.1, ta có

$$\mathcal{K}^w(\epsilon) = \bigcup_{\xi \in C_e^*} \mathcal{K}(\epsilon, \xi).$$

Bởi vì C_e^* là liên thông và $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ là nửa liên tục dưới trên C_e^*, Định lý 1.3.12 khẳng định rằng $\mathcal{K}^w(\epsilon)$ là liên thông. □

Nhận xét 5.4.4. Định lý 5.4.1 mở rộng Định lý 3.5 trong [26] khi $A = B$ và giả thiết C-giống lồi được thay bởi giả thiết C-dưới giống lồi. Trong trường hợp đặc biệt khi F là đơn trị và $\epsilon = 0$, Định lý 5.4.1 mở rộng Định lý 4.5 trong [21] bởi vì chúng tôi loại bỏ được điều kiện compắc của tập A và tính đơn điệu của hàm f đồng thời giả thiết C-lồi được thay bởi giả thiết C-dưới giống lồi.

Trong phần cuối của chương này ta thiết lập tính liên thông đường cho tập nghiệm yếu xấp xỉ của KFI(F, A, B). Chúng ta cần kết quả sau đây.

Bổ đề 5.4.5. *Giả sử rằng $D \subseteq X$ là liên thông đường và hàm véctơ $g : D \to Y$ liên tục. Khi đó, $g(D)$ là liên thông đường.*

Chứng minh. Với y_1 và y_2 tùy ý trong $g(D)$, $x_1 \in D$ và $x_2 \in D$ sao cho $g(x_1) = y_1$ và $g(x_2) = y_2$. Vì D là tập liên thông đường nên tồn tại một hàm véctơ liên tục

$\varphi : [0,1] \to D$ sao cho $\varphi(0) = x_1$ và $\varphi(1) = x_2$. Xét $\psi : [0,1] \to g(D)$ sao cho $\psi(t) = g(\varphi(t))$ với mọi $t \in [0,1]$. Khi đó ψ liên tục. Hơn nữa, ta có $\psi(0) = g(\varphi(0)) = g(x_1) = y_1$ và $\psi(1) = g(\varphi(1)) = g(x_2) = y_1$. Vì y_1 và y_2 thuộc $g(D)$ được chọn tùy ý nên $g(D)$ là liên thông đường. $\square$

Định lý 5.4.6. *Giả sử các giả thiết được đưa ra trong Định lý 5.3.2 thỏa mãn. Khi đó, $\mathcal{K}^w(\epsilon)$ là liên thông đường với $\epsilon \geq 0$ nếu như $\mathcal{K}(\epsilon, \xi)$ là duy nhất nghiệm với mọi $\xi \in C_e^*$.*

Chứng minh. Rõ ràng C_e^* lồi, nên liên thông đường. Hơn nữa, $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ là nửa liên tục dưới nên liên tục trên C_e^* bởi vì $\mathcal{K}(\epsilon, \xi)$ là duy nhất nghiệm với mỗi $\xi \in C_e^*$. Áp dụng Bổ đề 5.4.5, ta có $\bigcup_{\xi \in C_e^*} \mathcal{K}(\epsilon, \xi) = \mathcal{K}^w(\epsilon)$ là liên thông đường. $\square$

Hệ quả 5.4.7. *Theo các giả thiết của Hệ quả 5.3.3, $\mathcal{K}^w(\epsilon)$ là liên thông đường với $\epsilon \geq 0$.*

Chứng minh. Rõ ràng là C_e^* là liên thông đường và $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ liên tục trên C_e^*. Áp dụng Bổ đề 5.4.5, ta có $\bigcup_{\xi \in C_e^*} \mathcal{K}(\epsilon, \xi) = \mathcal{K}^w(\epsilon)$ là liên thông đường.

$\square$

Để minh họa các kết quả trên ta xét ví dụ sau.

Ví dụ 5.4.8. Cho $X = Y = Z = \mathbb{R}^2$, $A = \{(s,0) |\ s \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(t,0) |\ t \in I_+\}$ trong đó I_+ tập các số vô tỷ dương, $C = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 |\ y_2 \geq -y_1, y_2 \geq 0\}, e = (-1, 2)$ và $F(x,z) = \bar{B}(z, \frac{1}{2})$ với mọi $z \in B$.

Rõ ràng, A là lồi, F là C-lõm theo biến thứ nhất, và F là C-dưới giống lồi theo biến thứ 2. Ta có, với mọi $\epsilon \geq 0$,

$$F(A,B) + \epsilon e = \bigcup_{t \in I_+} \bar{B}((t-\epsilon, 2\epsilon), \frac{1}{2})$$

suy ra

$$(F(A,B) + \epsilon e) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset$$

và

$$(F(A,B) + \epsilon e) \cap (-\text{int}C) = \emptyset.$$

Do đó, $\mathcal{K}(\epsilon) = \mathcal{K}^w(\epsilon) = A$, nghĩa là, $\mathcal{K}(\epsilon)$ và $\mathcal{K}^w(\epsilon)$ là liên thông.

Tuy nhiên, A không là compắc và F không là C-đơn điệu bởi vì

$$F(A,B) + F(B,A) = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \bar{B}((t,0),\frac{1}{2}) \not\subseteq -C.$$

Kết luận

- Các kết quả chính của Chương 5 gồm: vô hướng hóa tuyến tính cho tập nghiệm yếu xấp xỉ của bất đẳng thức Ky Fan đa trị (Định lý 5.2.1), tính trù mật của tập nghiệm xấp xỉ (Định lý 5.3.4) và tính liên thông của tập nghiệm xấp xỉ và tập nghiệm yếu xấp xỉ (các Định lý 5.4.1, 5.4.3 và 5.4.6).

- Hướng phát triển của Chương 5 là thiết lập các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức Ky Fan đa trị dựa trên kỹ thuật vô hướng hóa.

KẾT LUẬN CHUNG

Các kết quả chính của luận án này bao gồm:

1. Các điều kiện đủ cho tính xấp xỉ của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị (Định lý 2.2.5), bài toán cân bằng Nash mở rộng (Định lý 2.3.2), nền kinh tế thuần túy trao đổi (Định lý 2.4.2) và bài toán cân bằng giao thông (Định lý 2.5.6);

2. Điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm xấp xỉ của trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số (Định lý 3.2.1), điều kiện đủ cho đặt chỉnh Levitin-Polyak của trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số (Định lý 3.3.5). Điều kiện cần và đủ cho đặt chỉnh Levitin-Polyak cho trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số trong các không gian mêtric (Định lý 3.3.9);

3. Các điều kiện đủ cho tính duy nhất nghiệm và cận sai số cho các dòng chấp nhận được của bài toán cân bằng giao thông (các Định lý 4.1.5 và 4.1.6);

4. Mối quan hệ giữa các dòng cân bằng xấp xỉ của mạng giao thông và các nghiệm xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng (Các Mệnh đề 4.2.3, 4.2.5, 4.2.9 và 4.2.11);

5. Các điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh Tikhonov theo nghĩa Levitin-Polyak của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị có tham số (Định lý 4.3.3) và của mạng giao thông có tham số (Định lý 4.3.6);

6. Các điều kiện đủ cho tính liên thông của tập nghiệm xấp xỉ và tập nghiệm yếu xấp xỉ của bất đẳng thức Kỳ Fan đa trị (các Định lý 5.4.1, 5.4.3 và 5.4.6).

CÁC NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

Các vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu dựa trên phương pháp tiếp cận và kết quả của luận án có thể dự kiến như sau:

1. Tính xấp xỉ cho bài toán tối ưu hai mức theo hướng nghiên cứu của [49] và cho bất đẳng thức Ky Fan đa trị;

2. Tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho mạng giao thông có ràng buộc tải năng trên cung;

3. Đánh giá độ nhạy nghiệm cho tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và các áp dụng theo hướng nghiên cứu của [62];

4. Cận sai số cho trò chơi đa mục tiêu mở rộng dựa trên hàm đánh giá;

5. Sự tồn tại nghiệm của trò chơi đa mục tiêu mở rộng và bất đẳng thức Ky Fan đa trị dựa trên kỹ thuật vô hướng hóa.

CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[KLS1] P. Q. Khanh, L. M. Luu, T. T. M. Son (2013), *Well-posedness of a parametric traffic network problem*, Nonlinear Anal. RWA. 14: 1643-1654.

[KLS2] P. Q. Khanh, L. M. Luu, T. T. M. Son (2016), *On the stability and Levitin-Polyak well-posedness of parametric multi-objective generalized games*, Vietnam J. Math., DOI: 10.1007/s10013-016-0189-8.

[KS1] P. Q. Khanh, T. T. M. Son (2015), *Approximations of quasi-variational inequalities and applications*, J. Global Optim., submitted for publication.

[KS2] P. Q. Khanh, T. T. M. Son (2015), *Uniqueness and error bounds of equilibrium flows of traffic networks*, Optim. Letter, submitted for publication.

[KS3] P. Q. Khanh, T. T. M. Son (2015), *Density and connectedness of approximate solution sets of set-valued Ky Fan inequalities*, Math. Meth. Oper. Res., submitted for publication.

CÁC BÁO CÁO HỘI THẢO LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] P. Q. Khanh, L. M. Luu, T. M. M. Son, *Well-posedness of a parametric traffic network problem*, The 8th Vietnam-Korea Workshop on Mathematical Optimization Theory and Applications, Dalat, December, 8-10, 2011.

[2] P. Q. Khanh, L. M. Luu, T. M. M. Son, *On the well-posedness for a parametric multi-objective generalized game with enlarged strategy sets*, The First Vietnam-France Congress of Mathematics, Hue, August 20-24, 2012.

[3] T. T. M. Son, *Stability for solution sets of traffic network equilibria*, International Spring School and Workshop on Analysis and Approximation in Optimization under Uncertainty, Ha Noi, February 18-23, 2013.

[4] T. T. M. Son, *On regularity properties of solutions of vector equilibrium problems*, 11th Workshop on Optimization and Scientific Computing, Ba Vi, April 24-27, 2013.

[5] P. Q. Khanh, T. T. M. Son, *On approximations of equilibrium problems*, The 8th Vietnam Mathematical Congress, Nha Trang, August 10-14, 2013.

Tài liệu tham khảo

[1] L. Q. Anh, P. Q. Khanh (2008), *Semicontinuity of solution sets to parametric quasivariational inclusions with applications to traffic networks, II: Lower semicontinuities. Applications*, Set Valued Anal. 16: 943-960.

[2] L. Q. Anh, P. Q. Khanh (2010), *Continuity of solution maps of parametric quasiequilibrium problems*, J. Global Optim. 46: 247-259.

[3] L. Q. Anh, P. Q. Khanh, D. T. M. Van (2011), *Well-posedness without semicontinuity for parametric quasiequilibria and quasioptimization*, Comp. Math. Appl. 62: 2045-2057.

[4] J. P. Aubin, I. Ekeland (1984), *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley and Sons.

[5] J. P. Aubin, H. Frankowska (1990), *Set-valued Analysis*, Birkhäuser.

[6] D. Aussel, R. Correa, M. Marechal (2011), *Gap functions for quasi-variational inequalities and generalized Nash equilibrium problems*. J. Optim. Theory. Appl. 151: 474-488.

[7] C. Berge (1963), *Topological Spaces*, Olivier and Boyd, London.

[8] E. Blum, W. Oettli (1994), *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*, Math. Student 63: 123-145.

[9] A. O. Caruso, A. A. Khan, F. Raciti (2009), *Continuity results for some classes of variational inequalities and applications to time-dependent equilibrium problems*, Num. Func. Anal. Optim. 30: 1272-1288.

[10] S. Chebbi (2008), *Existence of Pareto equilibria for non-compact constrained multi-criteria games*. J. Appl. Anal. 14: 219-226.

[11] J. Danes (1972), *On the Istratescu measure of noncompactness*. Bull. Math. Soc. Roumanie 16: 403-406.

[12] H. T. H. Diem, P. Q. Khanh (2015), *Variational convergence of bifunctions on nonrectangular domains and approximations of quasivariational problems*, J. Global Optim. submitted for publication.

[13] M. De Luca (1995), *Generalized Quasi-variational inequalities and traffic equilibrium problem.* In: F. Giannessi, A. Maugeri, (eds.), Variational Inequalities and Networks Equilibrium Problems, Plenum Press, New York.

[14] M. B. Donato, M. Milasi, C. Vitanza (2014), *Variational problem, generalized convexity, and application to a competitive equilibrium problem.* Numer. Funct. Anal. Optim. 35: 962-983.

[15] K. Fan (1972), *A minimax inequality and applications*, Academic Press, New York. In Inequality III: 103-113.

[16] F. Ferro (1989), *A minimax theorem for vector valued functions*, J. Optim. Theory Appl. 60: 19-31.

[17] J. B. G. Frenk, G. Kassay (1999), *On classes of generalized convex functions, Gordan-Farkas type theorems and Lagrangian duality*, J. Optim. Theory Appl. 102: 315-343.

[18] M. Fukushima (2007), *A class of gap functions for quasi-variational inequality problems*, J. Ind. Manag. Optim. 3: 165-171.

[19] P. G. Georgiev, P. M. Pardalos (2011), *Generalized Nash equilibrium problems for lower semicontinuous strategy maps*, J. Global Optim. 50: 119-125.

[20] X. H. Gong (2001), *Efficiency and Henig efficiency for vector equilibrium problems.* J. Optim. Theory Appl. 108: 139-154.

[21] X. H. Gong (2007), *Connectedness of the solution sets and scalarization for vector equilibrium problems*, J. Optim. Theory Appl. 133: 151-161.

[22] X. H. Gong, J. C. Yao (2008): *Connectedness of the set of efficient solutions for generalized systems*, J. Optim. Theory Appl. 138: 189-196.

[23] A. Göpfert, H. Riahi, C. Tammer, C. Zalinescu (2003), *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*, Series: CMS Books in Mathematics 17. Springer, New York.

[24] J. Hadamard (1902), *Sur le problèmes aux dèrivees partielles et leur signification physique*, Bull. Univ. Princeton, 13: 49-52.

[25] Y. Han, N. J. Huang (2015), *The connectedness of the solutions set for generalized vector equilibrium problems*, Optimization, DOI: 10. 1080 - 02331934. 2015. 1044899.

[26] Y. Han, N. J. Huang (2016), *Some characterizations of the approximate solutions to generalized vector equilibrium problems* , J. Ind. Manag. Optim. 12: 1135-1151.

[27] P. T. Harker, J. S. Pang (1990), *Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms, and applications*, Math. Program. 48: 161-220.

[28] R. Hu, Y. P. Fang, N. J. Huang (2010), *Characterizations of α-well-posedness for parametric quasivariational inequalities defined by bifunctions*, Math. Commun. 15: 37-55.

[29] X. X. Huang, X. Q. Yang (2006), *Generalized Levitin-Polyak well-posedness in constrained optimization*, SIAM J. Optim. 17: 243-258.

[30] P. G. Hung, L. D. Muu (2011), *The Tikhonov regularization extended to equilibrium problems involving pseudomonotone bifunctions*, Nonlinear Analyzis: TMA 74: 6121-6129.

[31] A. Jofré, R. J. B. Wets (2002), *Continuity properties of Walras equilibrium points*. Ann. Oper. Res. 114: 229-243.

[32] A. Jofré, R. J. B. Wets (2009), *Variational convergence of bivariate functions: lopsided convergence*, Math. Program. Ser. B, 116: 275-295.

[33] A. Jofré, R. J. B. Wets (2014), *Variational convergence of bivariate functions: motivating application*, SIAM J. Optim. 24: 1952-1979.

[34] A. Jourani, D. Zagrodny (2012), *The positiveness of lower limits of the Hoffman constant in parametric polyhedral programs*, J. Global Optim. 53: 641-661.

[35] P. Q. Khanh, L. M. Luu (2004), *On the existence of solution to vector quasivariational inequalities and quasi-complementarity with applications to traffic network equilibria*, J. Optim. Theory Appl. 123: 533-548.

[36] P. Q. Khanh, L. M. Luu (2005), *Some existence results for vector quasivariational inequalities involving multifunctions and applications to traffic equilibrium problems*, J. Global Optim. 32: 551-568.

[37] P. Q. Khanh, L. M. Luu (2007), *Lower and upper semicontinuity of the solution sets and the approxiamte solution sets to parametric multivalued quasivariational inequalities*, J. Optim. Theory Appl. 133: 329-339.

[38] P. Q. Khanh, L. M. Luu, T. T. M. Son (2013), *Well-posedness of a parametric traffic network problem*, Nonlinear Anal. RWA 14: 1643-1654.

[39] P. Q. Khanh, L. M. Luu, T. T. M. Son (2016), *On the stability and Levitin-Polyak well-posedness of parametric multi-objective generalized games*, Vietnam J. Math., DOI: 10.1007/s10013-016-0189-8.

[40] P. Q. Khanh, T. T. M. Son (2015), *Approximations of quasi-variational inequalities and applications*, J. Global Optim., submitted for publication.

[41] P. Q. Khanh, T. T. M. Son (2015), *Uniqueness and error bounds of equilibrium flows of traffic networks*, Optim. Letter, submitted for publication.

[42] P. Q. Khanh, T. T. M. Son (2015), *Density and connectedness of approximate solution sets of generalized Ky Fan inequalities*, Math. Meth. Oper. Res., submitted for publication.

[43] C. S. Lalitha, G. Bhatia (2011), *Stability of parametric quasivariational inequality of the Minty type*, J. Optim. Theory Appl. 148: 281-300.

[44] E. S. Levitin, B. T. Polyak (1966), *Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems*, Soviet Math. Dokl. 7: 764-767.

[45] Z. F. Li, G. Y. Chen (1997), *Lagrangian multipliers, saddle points and duality in vector optimization with set-valued maps*, J. Math. Anal. Appl. 215: 297-316.

[46] M. B. Lignola (2006), *Well-posedness and L-well-posedness for quasivariational inequalities*, J. Optim. Theory Appl. 128: 119-138.

[47] M. B. Lignola, J. Morgan (2000), *Approximating solutions and α-well-posedness for variational inequalities and Nash equilibria*, in: Decision and Control in Management Science, (G. Zaccour, Ed.), Kluwer Academic, 367-378.

[48] M. B. Lignola, J. Morgan (2006), *α-well-posedness for Nash equilibria and for optimization problems with Nash equilibrium constraints*, J. Global Optim. 36: 439-459.

[49] M. B. Lignola, J. Morgan (2012), *Stability in regularized quasi-variational settings*, J. Convex Anal. 19: 1091-1107.

[50] Z. Lin (2005), *Essential components of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points for multiobjective generalized games in two different topological spaces*, J. Optim. Theory Appl. 124: 387-405.

[51] R. Lopez (2012), *Approximations of equilibrium problems*, Siam J. Control Optim. 50: 1038-1070.

[52] D. T. Luc (1989), *Theory of Vector Optimization, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 319, Springer-Verlag, Berlin.

[53] A. Maugeri (1995), *Variational and quasi-variational inequalities in network flow models.* Recent developments in theory and algorithms. In: F. Giannessi, A. Maugeri (eds.), Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems, Plenum Press, New York.

[54] B. S. Mordukhovich (2006), *Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory*, Springer, Berlin.

[55] J. Morgan (2005), *Approximations and well-posedness in multicriteria games*, Ann. Oper. Res. 137: 257-268.

[56] J. Morgan, R. Raucci (2002), *Lower semicontinuity for approximate social Nash equilibria*, Int. J. Game Theory 31: 499-509.

[57] L. D. Muu (1984), *Stability property of a class of variational inequalities*, Optimization 15: 347-351.

[58] L. D. Muu, W. Oettli (1992), *Convergence of an adaptive penalty method for monotone variational inequalities and convex optimization*, Nonlinear Analysis: TMA 18: 1159-1166.

[59] H. V. Ngai, M. Théra (2005), *Error bounds for convex differentiable inequality systems in Banach spaces*, Math. Prog. 104: 465-482.

[60] J. S. Pang (1997), *Error bounds in mathematical programming*, Math. Programming, Ser. B 79: 299-332.

[61] N. S. Papageorgiou (1992), *Continuous dependence results for subdifferential inclusions*, Publi. Inst. Math. 52: 47-60.

[62] M. Patriksson, R. T. Rockafellar (2003), *Sensitivity analysis of aggregated variational inequality problems, with application to traffic equilibrium*, Trans. Sci. 37: 56-68.

[63] Z. Y. Peng, X. M. Yang (2015), *On the connectedness of efficient solutions for generalized Ky Fan inequality problems*, J. Nonlinear Convex Anal. 16: 907-917.

[64] J. W. Peng, S. Y. Wu (2011), *The well-posedness for multiobjective generalized games*, J. Optim. Theory Appl. 150: 416-423.

[65] L. P. Chicco (2001), *Approximate solutions and Tikhonov well-posedness for Nash equilibria.* In Giannessi, F. et al. (Eds.) Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models, Kluwer Academic 231-246.

[66] Q. S. Qiu, X. M. Yang (2013), *Scalarization of approximate solution for vector equilibrium problems*, J. Ind. Manag. Optim. 9: 143–151.

[67] R. T. Rockafellar, R. J. B. Wets (2009), *Variational Analysis*, Springer, Berlin.

[68] P. H. Sach (2016), *Connectedness in vector equilibrium problems involving cones with possibly empty interior*, Op. Res. Letters 44: 177-179.

[69] T. T. M. Son (2012), *Convergence and stability of traffic equilibrium flows*, J. Sci. Dalat Univer. 4: 1-10.

[70] Q. Q. Song, L. S. Wang (2010), *On the stability of the solution for multiobjective generalized games with the payoffs perturbed*, Nonlinear Anal. 73: 2680-2685.

[71] M. J. Smith (1979), *The existence, uniqueness and stability of traffic equilibrium*, Trans. Res. Part B 13: 295-304.

[72] N. X. Tan (2004), *On the existence of solutions of quasivariational inclusion problems*, J. Optim. Theory Appl. 123: 619-638.

[73] A. N. Tikhonov (1966), *On the stability of the functional optimization problem*, Soviet Comput. Math. Math. Phys. 6: 28-33.

[74] A. R. Warburton (1983), *Quasiconcave vector maximization: connectedness of the sets of Pareto-optimal and weak Pareto-optimal alternatives*, J. Optim. Theory Appl. 40: 537-557.

[75] N. D. Yen, T. D. Phuong (2000), *Connectedness and stability of the solution set in linear fractional vector optimization problems.* In: Vector Variational Inequalities and Vector Equilibria. Mathematical Theories, F. Giannessi, Ed., Nonconvex Optim. Appl. 38, Kluwer Academic 479-489.