BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

PHAN PHIẾN

# MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ TÍNH ĐỊNH LƯỢNG TRONG GIẢI TÍCH VI PHÂN

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC**

Đà Lạt – 2011

**BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO**
**TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT**

**PHAN PHIẾN**

# MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ TÍNH ĐỊNH LƯỢNG TRONG GIẢI TÍCH VI PHÂN

**Chuyên ngành:** **TOÁN GIẢI TÍCH**
**Mã số:** **62.46.01.01**

**LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC**

**NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC:**
**1. PGS. TS. Tạ Lê Lợi**
**2. PGS. TS. Phạm Tiến Sơn**

**Đà Lạt - 2011**

# LỜI CAM ĐOAN

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Đà Lạt dưới sự hướng dẫn khoa học của PGS. TS Tạ Lê Lợi.

PGS. TS Phạm Tiến Sơn đã đọc và sửa chữa luận án.

Các kết quả trong các bài báo [2] và [3] ở danh mục các công trình liên quan đến luận án, tác giả nghiên cứu dưới sự hướng dẫn và gợi ý của PGS. TS Tạ Lê Lợi.

Các kết quả trong luận án này là mới và chưa từng được công bố trong bất kỳ công trình khoa học nào của ai khác.

Đà Lạt, tháng 12 năm 2011 Phan Phiến

# LỜI CẢM ƠN

Tác giả xin trân trọng cảm ơn Lãnh đạo Trường Đại học Đà Lạt, Phòng Đào Tạo Đại học và Sau Đại học, Phòng NCKH-HTQT, Khoa Sau Đại học, Khoa Toán Tin học, Trưởng ngành Toán Giải tích; Lãnh đạo Trường Cao đẳng sư phạm Nha Trang, Khoa Tự Nhiên đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong suốt quá trình làm nghiên cứu sinh tại Đại học Đà Lạt từ tháng 11 năm 2007.

Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn đến PGS.TS Tạ Lê Lợi đã tận tình hướng dẫn, giúp đỡ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và hoàn thành luận án.

Tác giả xin trân trọng cảm ơn PGS.TS Phạm Tiến Sơn đã đọc và sửa chữa luận án.

Tác giả cũng xin cảm ơn gia đình, các bạn bè, đồng nghiệp đã luôn chia sẻ, động viên tác giả trong cả khóa học này.

Đà Lạt, tháng 12 năm 2011 Phan Phiến

# Mục lục

# DANH SÁCH CÁC KÝ HIỆU

| Ký hiệu | | Trang |
|---|---|---|
| $\mathbf{M}_{m\times n}$ | không gian các ma trận thực cấp $m \times n$ | 18 |
| $\mathbf{B}^n$ | quả cầu đơn vị mở trong $\mathbb{R}^n$ | 18 |
| $\mathbf{B}^n_r$ | quả cầu bán kính $r$, tâm tại $0 \in \mathbb{R}^n$ | 18 |
| $\mathbf{B}^n_r(x_0)$ | quả cầu bán kính $r$, tâm tại $x_0 \in \mathbb{R}^n$ | 18 |
| $\mathbf{S}^{n-1}$ | mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$ | 18 |
| $\mathcal{B}_{n\times n}$ | quả cầu đơn vị trong $\mathbf{M}_{n\times n}$ | 18 |
| $\|x\|$ | chuẩn của vector $x \in \mathbb{R}^n$ | 18 |
| $\|A\|$ | chuẩn của ma trận $A$ | 18 |
| $\|A\|_F$ | chuẩn Frobenius của ma trận $A$ | 18 |
| $\|A\|_{\max}$ | chuẩn max của ma trận $A$ | 18 |
| $\partial f(x_0)$ | Jacobi suy rộng của $f$ tại $x_0$ | 19 |
| $Jf(x_i)$ | ma trận Jacobi của $f$ tại $x_i$ | 19 |
| $\mathrm{L}(f)$ | hệ số Lipschitz của $f$ | 20 |
| $\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ | không gian các ánh xạ Lipschitz | 20 |
| $\mathrm{Lip}_{x_0}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ | không gian các ánh xạ Lipschitz thỏa $f(x_0) = 0$ | 20 |
| $\partial_1 F(x_0, y_0)$ | Jacobi tổng quát của $F(\cdot, y_0) : U \to \mathbb{R}^n$ | 23 |
| $\partial_2 F(x_0, y_0)$ | Jacobi tổng quát của $F(x_0, \cdot) : U \to \mathbb{R}^n$ | 23 |
| $\sigma_i(L)$ | giá trị kỳ dị thứ $i$ của ánh xạ tuyến tính $L$ | 34 |
| $\sigma_{\max}(A)$ | giá trị kỳ dị lớn nhất của $A$ | 34 |
| $\sigma_{\min}(A)$ | giá trị kỳ dị nhỏ nhất của $A$ | 34 |
| $\Sigma(f, \Lambda)$ | tập các điểm $\Lambda$-tới hạn của $f$ | 34 |
| $\Delta(f, \Lambda)$ | tập các giá trị $\Lambda$-tới hạn của $f$ | 34 |
| $\Sigma(f, \Lambda, A)$ | tập các điểm $\Lambda$-tới hạn của $f$ chứa trong $A$ | 34 |
| $\Delta(f, \Lambda, A)$ | tập các giá trị $\Lambda$-tới hạn của $f$ chứa trong $A$ | 34 |

| Ký hiệu | | Trang |
|---|---|---|
| $M(\varepsilon, A)$ | số quả cầu bán kính $\varepsilon$ phủ $A$ | 35 |
| $\\|f\\|_{C^k}$ | $C^k$-chuẩn của $f$ | 35 |
| $\mathrm{Sym}(n)$ | không gian các ma trận đối xứng cấp $n$ | 36 |
| $R_k(f)$ | hệ số Taylor | 37 |
| $P^h$ | đa thức thuần nhất hóa của $P$ | 47 |
| $Z(\mathcal{P}, S)$ | tập các không điểm của $\mathcal{P}$ trong $S$ | 48 |
| $\mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle$ | trường thực đóng của các chuỗi Puiseux | 48 |
| $D(A)$ | lược đồ của tập nửa đại số | 50 |
| $f \sim_{sa} g$ | $f$ và $g$ đồng luân nửa đại số | 51 |
| $\mathrm{Ext}(S, \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle^k)$ | mở rộng của $S$ vào $\mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle^k$ | 51 |
| $H_p, H^p$ | nhóm đồng điều và đối đồng điều thứ $p$ | 53 |
| $b_p(S)$ | số Betti thứ $p$ của $S$ | 53 |
| $b(S)$ | tổng các số Betti thứ của $S$ | 53 |
| $\widetilde{H}_i(A)$ và $\widetilde{H}^i(A)$ | nhóm đồng điều và đối đồng điều rút gọn của $A$ | 54 |
| $\Gamma(f)$ | đồ thị của $f$ | 65 |
| $(f, g)$ | dải băng giữa $f$ và $g$ | 65 |
| $\dim A$ | chiều của tập $A$ | 66 |
| $A_x$ | thớ của tập $A$ | 68 |
| $F(A)$ | format của tập nửa-Pfaff $A$ | 72 |
| $O(m, n)$ | tập các đơn ánh trực giao từ $\mathbb{R}^m$ vào $\mathbb{R}^n$ | 73 |
| $O(m)$ | $O(m, m)$ | 73 |
| $O^*(m, n)$ | tập các phép chiếu trực giao từ $\mathbb{R}^m$ vào $\mathbb{R}^n$ | 73 |
| $c(\alpha)$ | | 73 |
| $\mathcal{C}(\varepsilon, A)$ | | 73 |
| $\mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(A)$ | | 73 |
| $\mathcal{H}^\alpha(A)$ | độ đo Hausdorff chiều $\alpha$ của tập $A$ | 74 |
| $\#(A)$ | lực lượng của tập $A$ | 75 |
| $\Gamma(s)$ | hàm Gamma | 75 |

# DANH SÁCH CÁC HÌNH ẢNH

# TÓM TẮT

Luận án này trình bày một số kết quả mới về đánh giá định lượng trong giải tích vi phân. Luận án có 4 chương. Hai chương đầu nghiên cứu các đánh giá định lượng dựa trên các tính toán trong Giải tích số. Các kết quả của hai chương sau được nghiên cứu dựa trên các kỹ thuật về đánh giá độ phức tạp, Đại số tính toán và Tích phân hình học.

Chương 1 nghiên cứu đưa ra các kết quả định lượng về định lý hàm ngược và hàm ẩn bao gồm: Định lý hàm ngược định lượng cho ánh xạ Lipschitz (Định lý 1.3.1); Định lý hàm ẩn định lượng cho ánh xạ Lipschitz (Định lý 1.4.2); Tính mở của lớp các ánh xạ Lipschitz thỏa định lý hàm ngược Clarke (Định lý 1.5.1).

Chương 2 đưa ra một chứng minh cho định lý Morse định lượng được phát biểu bởi Y. Yomdin (Định lý 2.5.1) và chứng minh bổ đề Morse định lượng (Bổ đề 2.3.1).

Chương 3 đưa ra đánh giá chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số cơ sở (Định lý 3.3.1), từ đó đưa ra chặn trên cho tổng các số Betti (Hệ quả 3.3.2).

Chương 4 nghiên cứu đưa ra các kết quả về đánh giá chặn trên cho độ phức tạp đại số và độ đo Hausdorff của các tập thuần bao gồm: Chặn đều cho các số Betti của các thớ của ánh xạ định nghĩa được (Mệnh đề 4.3.1); Chặn trên cho độ đo Hausdorff của các tập định nghĩa được (Định lý 4.4.1); Chặn trên cho độ đo Hausdorff của các thớ định nghĩa được (Định lý 4.5.1); Chặn trên cho độ đo Hausdorff của nghịch ảnh qua ánh xạ định nghĩa được của một họ các đường cong định nghĩa được (Định lý 4.5.4).

# MỞ ĐẦU

**Lý do chọn đề tài**: Bài toán nghiên cứu đánh giá định lượng cho các kết quả định tính đã có, hoặc đưa ra các kết quả định lượng mới, đã được quan tâm nhiều bởi các ứng dụng của nó trong các lĩnh vực khác nhau như: Lý thuyết số, Tối ưu hóa, Lý thuyết độ đo, Đánh giá độ phức tạp thuật toán,... Các kết quả về định lượng trong giải tích được ứng dụng nhiều cho các công trình toán học phải kể đến đó là các định lý Sard, định lý Morse về định lượng và định lý hoành định lượng. Có thể nói sự thiếu vắng định lý Sard định lượng thực sự cản trở việc xây dựng các kết quả về định lượng và ứng dụng của nó trong Lý thuyết kỳ dị. Hơn nữa, định lý Sard định lượng còn là cơ sở cho các kết quả hình học trong lĩnh vực Hình học đại số thực.

**Mục đích và phương pháp nghiên cứu:** Luận án này nghiên cứu các đánh giá định lượng về định lý hàm ngược, định lý hàm ẩn và định lý Morse dựa trên các phương pháp trong Giải tích số. Đồng thời áp dụng các phương pháp về đánh giá độ phức tạp topo trong Hình học đại số thực, các tính toán trong Đại số tuyến tính và Tích phân hình học, luận án cũng đưa ra các nghiên cứu định lượng về các số Betti và độ đo Hausdorff.

**Các đối tượng nghiên cứu chính bao gồm**: Lớp các ánh xạ Lipschitz; Lớp các ánh xạ khả vi lớp $C^k$; Lớp các tập và ánh xạ định nghĩa được trong cấu trúc o-tối tiểu như các đối tượng nửa đại số và nửa-Pfaff.

**Tổng quan những vấn đề liên quan đến luận án:**

Các nghiên cứu về định lý hàm ngược, hàm ẩn: F. H. Clarke (1976 - [C1]) đã chứng minh định lý hàm ngược địa phương cho ánh xạ $K$-Lipschitz. Tổng quát hơn,

M. S. Gowda (2004 - [Go]) chứng minh định lý hàm ngược và hàm ẩn cho lớp các ánh xạ H - khả vi. Đối với trường hợp toàn cục, J. Hadamard (1906 - [Ha]) đã phát biểu điều kiện vi phôi toàn cục cho ánh xạ lớp $C^1$. J. Hadamard và P. J. Rabier (1997 - [R]) đã mở rộng kết quả của J. Hadamard trên không gian các đa tạp trơn. O. Gutú và J. A. Jaramillo (2007 - [Gu-J]) đã chứng minh điều kiện khả nghịch toàn cục cho lớp các ánh xạ tựa đẳng cự giữa các không gian metric đủ. Mới đây, T. Fukui, K. Kurdyka và L. Paunescu (2010 - [F-K-P]) đã chứng minh định lý hàm ngược toàn cục cho lớp các ánh xạ liên tục thuần. Đối với định lý hàm ẩn, M. Papi (2004 - [PA]) đã đưa ra miền xác định của hàm ẩn Lipschitz, kết quả nhận được phụ thuộc vào các tham số chưa tường minh. Hầu hết các nghiên cứu đều chỉ ra sự tồn tại các lân cận $U$ và $V$ để $f : U \to V$ khả nghịch, mà chưa đưa ra các đánh giá định lượng cho các đối tượng trong các kết quả đó.

Nghiên cứu về các điểm tới hạn trong Lý thuyết kỳ dị, Y. Yomdin (1983 - [Y3]) đã đưa ra khái niệm điểm gần tới hạn và giá trị gần tới hạn của một ánh xạ khả vi. Đến nay có nhiều kết quả nghiên cứu về đánh giá định lượng cho các điểm và các giá trị gần tới hạn. Y. Yomdin (1983 - [Y3]) đã chứng minh Định lý Sard định lượng cho các ánh xạ lớp $C^k$. Kết quả đưa ra đánh giá chặn trên cho entropy của tập các giá trị $\Lambda$-tới hạn. Y. Yomdin (1987 - [Y2], 2005 - [Y1]), Y. Yomdin và G. Comte (2004 - [Y-C]) đã đưa ra một số dạng cải tiến của Định lý Sard định lượng. Hơn nữa, kết quả đã cho một số đánh giá tường minh trong các trường hợp hàm khả vi lớp $C^k$. Ngoài ra, A. Rohde (1997 - [Roh]) đã chứng minh định lý Sard cho lớp các hàm không trơn. Đối với Định lý Morse, Y. Yomdin (2005 - [Y1]) đã phát biểu Định lý Morse định lượng cho các hàm khả vi. Tuy nhiên trong bài báo này, Y. Yomdin chỉ nêu một vài gợi ý chứng minh, mà không đưa ra chứng minh chi tiết. Có lẽ đến nay, Y. Yomdin cũng chưa công bố chứng minh của định lý. Một dạng định lượng khác của Định lý Morse đã được L. Niederman (2004 - [N]) chứng minh cho các hàm Morse Diophantine.

Nghiên cứu về các số Betti của tập nửa đại số, kết quả sớm nhất và điển hình trong lĩnh vực này đó là kết quả của Oleinik-Petrovskii, Thom, Milnor về đánh giá chặn trên cho tổng các số Betti của các tập đại số, và đó là một kết quả cơ sở cho một số đánh giá chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số. Gần đây, có nhiều kết quả thu được bởi S. Basu: S. Basu (2003 - [Ba2]) đã đưa ra đánh giá chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số cơ sở được chứa trong một tập đại số. Đối với tập nửa đại số được định nghĩa bởi các đa thức có bậc $\leq 2$, S. Basu và M. Kettner (2008 - [Ba-K]) đã đưa ra một chặn trên là đa thức theo số biến $k$ và số đa thức $m$ ($m < k$). Kết quả dựa trên việc đánh giá các số Betti của đa tạp xạ ảnh phức là giao đầy đủ không suy biến, được định nghĩa bởi các dạng toàn phương.

Các kết quả về độ đo Hausdorff được nghiên cứu dựa trên các công thức Cauchy-Crofton và co-area trong Tích phân hình học. Kết quả điển hình thu được bởi R. M. Hardt (1983 - [H]), kết quả đưa ra các chặn trên cho độ đo Hausdorff của các tập sub-giải tích, thớ của ánh xạ sub-giải tích và nghịch ảnh của một đoạn của một ánh xạ sub-giải tích. Gần đây, một kết quả khác của A. Fornasiero và E. Vasquez Rifon (2010 - [F-R]) cho chứng minh của các công thức Cauchy-Crofton và co-area.

**Những đóng góp mới của luận án:** Luận án này đưa ra một số kết quả mới về các vấn đề nêu trên, thể hiện qua bốn chương như sau.

Chương 1 "**Một số kết quả định lượng về định lý hàm ngược, hàm ẩn**" nghiên cứu các kết quả định lượng về định lý hàm ngược, hàm ẩn cho ánh xạ Lipschitz. Dựa trên kết quả của F. H. Clarke về định lý hàm ngược cho ánh xạ Lipschitz, luận án đưa ra định lý hàm ngược định lượng cho ánh xạ Lipchitz (Định lý 1.3.1), chứng minh định lý hàm ẩn định lượng cho ánh xạ Lipschitz (Định lý 1.4.2). Ngoài ra, luận án cũng chứng minh được rằng: Cho $f_0$ là một ánh xạ Lipschtz thỏa định lý hàm ngược Clarke. Nếu nhiễu $f_0$ bởi một ánh xạ Lipschitz $h$ với hằng số Lipschitz thích hợp thì ánh xạ thu được $f = f_0 + h$ cũng thỏa định lý hàm ngược Clarke (Định lý 1.5.1). Nói cách khác, lớp các ánh xạ Lipschitz thỏa định lý hàm ngược Clarke là mở trong không gian các ánh xạ Lipschitz. Hơn nữa, luận án cũng đưa ra một số ví dụ đánh giá định lượng tường minh.

Chương 2 "**Định lý Sard và định lý Morse định lượng**" nghiên cứu các kết quả định lượng về định lý Sard và định lý Morse. Áp dụng các kết quả về Đại số tuyến tính, luận án chứng minh Bổ đề Morse định lượng (Bổ đề 2.3.1). Từ đó áp dụng định lý Sard định lượng và định lý hàm ngược định lượng cho ánh xạ Lipschitz, luận án đưa ra một chứng minh chi tiết cho định lý Morse định lượng được phát biểu bởi Y. Yomdin (Định lý 2.5.1).

Chương 3 "**Chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số**" nghiên cứu về một số kết quả và kỹ thuật chứng minh của Hình học đại số thực. Từ đó đưa ra một đánh giá chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số cơ sở (Định lý 3.3.1) và chặn trên cho tổng các số Betti (Hệ quả 3.3.2). Các chặn trên phụ thuộc vào tổ hợp dữ liệu định nghĩa các tập nửa đại số.

Chương 4 "**Chặn trên cho độ đo Hausdorff của các tập thuần**" nghiên cứu áp dụng phương pháp Tích phân hình học trong việc ước lượng độ đo Hausdorff của các đối tượng định nghĩa được. Luận án đưa ra chặn trên cho các số Betti của các thớ định nghĩa được (Mệnh đề 4.3.1). Từ đó đưa ra các đánh giá: Chặn trên cho độ đo Hausdorff của các tập định nghĩa được (Định lý 4.4.1); Chặn trên cho độ đo Hausdorff của các thớ định nghĩa được (Định lý 4.5.1) và chặn trên cho độ đo Hausdorff của nghịch ảnh qua ánh xạ định nghĩa được của một họ các đường cong định nghĩa được (Định lý 4.5.4). Các chặn trên nhận được là các hàm chỉ phụ thuộc vào tổ hợp dữ liệu biểu diễn các đối tượng đó. Hơn nữa, luận án cũng đưa ra một số ví dụ tường minh trong một số trường hợp như nửa đại số và nửa Pfaff.

**Ý nghĩa khoa học:** Luận án đã nghiên cứu đưa ra một số kết quả mới mà có thể được áp dụng cho một số lĩnh vực như Giải tích số, Tối ưu hóa, Lý thuyết độ đo, Đánh giá độ phức tạp thuật toán, Động lực học...

Hầu hết các kết quả trong luận án này đã được báo cáo ở các Seminar hoặc các hội thảo:

- Seminar ngành Toán lý thuyết - Khoa Toán Tin học, Đại học Đà Lạt.
- Các Hội nghị Khoa học Khoa Sau Đại học, Đại học Đà Lạt: 2008, 2009, 2010.
- Đại hội Toán Học Toàn Quốc Lần 7, Đại học Quy Nhơn 4-8/8/2008.
- Hội nghị quốc tế về Đại số - Hình học - Tô pô - Số học, Đại học Đà Lạt 22-24/12/2008.
- Hội nghị Tin học và Toán Ứng dụng, Đại học Nha Trang 17/6/2011.
- Hội nghị Toàn Quốc về Đại số - Hình học - Tô pô, Đại học Thái Nguyên 3-5/11/2011.
- International Conference in Mathematics and Applications (ICMA - MU 2011), Mahidol University, Thailand 17-19/12/2011.

# Chương 1

# MỘT SỐ KẾT QUẢ ĐỊNH LƯỢNG VỀ ĐỊNH LÝ HÀM NGƯỢC, HÀM ẨN

## 1.1 Giới thiệu

Định lý hàm ngược, hàm ẩn cổ điển đã được quan tâm nhiều bởi ứng dụng của nó trong Toán học, nó được phát biểu cho lớp ánh xạ khả vi lớp $C^k$. Đến nay, đã có nhiều kết quả nghiên cứu về định lý hàm ngược, hàm ẩn cho lớp các ánh xạ không trơn và mở rộng toàn cục.

F. H. Clarke (1976 - [C1]) đã chứng minh định lý hàm ngược địa phương cho ánh xạ không trơn thỏa điều kiện Lipschitz: Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ Lipschitz trong lân cận $x_0$. Nếu Jacobi suy rộng $\partial f(x_0)$ tại $x_0$ có hạng cực đại (xem Định nghĩa 1.2.4, 1.2.5), thì tồn tại các lân cận $U$ và $V$ của $x_0$ và $f(x_0)$ tương ứng, và một ánh xạ Lipschitz $g : V \to \mathbb{R}^n$ sao cho

(a) $g(f(u)) = u$ với mọi $u \in U$,

(b) $f(g(v)) = v$ với mọi $v \in V$.

Tổng quát hơn, M. S. Gowda (2004 - [Go]) chứng minh định lý hàm ngược và hàm ẩn cho lớp các ánh xạ H - khả vi. Đối với trường hợp toàn cục, J. Hadamard (1906 - [Ha]) đã phát biểu điều kiện vi phôi toàn cục cho ánh xạ lớp $C^1$. J. Hadamard, P. J. Rabier (1997 - [R]) đã mở rộng kết quả của J. Hadamard trên không gian các đa tạp trơn. O. Gutú và J. A. Jaramillo (2007 - [Gu-J]) đã chứng minh điều kiện khả nghịch toàn cục cho lớp các ánh xạ tựa đẳng cự giữa các không gian metric đủ. Mới đây, T. Fukui, K. Kurdyka, và L. Paunescu (2010 - [F-K-P]) đã chứng minh định lý hàm ngược toàn cục cho lớp các ánh xạ liên tục thuần.

Đối với định lý hàm ẩn, M. Papi (2004 - [PA]) đã đưa ra miền xác định của hàm ẩn Lipschitz. Tuy nhiên kết quả nhận được phụ thuộc vào các tham số chưa tường minh.

Hầu hết các nghiên cứu về định lý hàm ngược, hàm ẩn đều chỉ ra sự tồn tại các lân cận $U$ và $V$ để $f : U \to V$ khả nghịch, mà chưa đưa ra các đánh giá định lượng cho các đối tượng trong các kết quả đó. Việc đánh giá định lượng cho các định lý hàm ngược, hàm ẩn là cần thiết cho toán học. Các kết quả nghiên cứu về định lượng nếu đạt được, có thể có nhiều áp dụng trong một số lĩnh vực khác nhau như: Lý thuyết số, Tối ưu hóa, Lý thuyết độ đo, Đánh giá độ phức tạp thuật toán,...

Với những lý do trên, chương này chúng tôi đưa ra một số kết quả về đánh giá định lượng cho các định lý hàm ngược, hàm ẩn. Trong phần 3 chúng tôi phát biểu dạng định lượng cho định lý hàm ngược Lipschitz Clarke (Định lý 1.3.1), kết quả đưa ra đánh giá định lượng cho $U$, $V$ và hệ số Lipschitz $L(g)$ của ánh xạ ngược $g$, khi đó $U$, $V$ và $L(g)$ được đánh giá phụ thuộc vào $\partial f(x_0)$. Trong phần 4 chúng tôi chứng minh định lý hàm ẩn Lipschiz định lượng (Định lý 1.4.2), chứng minh được trình bày với kỹ thuật khác với kết quả của M. Papi [PA, Theorem 3.1]. Hơn nữa các điều kiện đưa ra trong luận án là đơn giản hơn và có thể tính toán tường minh cho trường hợp cụ thể. Phần 5 chứng minh lớp các ánh xạ Lipschitz thỏa định lý hàm ngược Clarke là mở (Định lý 1.5.1): nếu nhiễu $f$ bởi một ánh xạ $h$ với hệ số Lipschitz đủ bé thì $f$ vẫn ổn định, nói cách khác, khi đó ánh xạ $f + h$ cũng khả nghịch địa phương.

## 1.2 Kiến thức cơ sở

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số khái niệm và các tính chất liên quan sẽ được sử dụng trong các kết quả của chương và luận án.

### 1.2.1 Ký hiệu

Trong luận án này, chúng tôi sẽ sử dụng các ký hiệu sau:
Ký hiệu $\mathbf{M}_{m\times n}$ là không gian các ma trận thực cấp $m \times n$, $\mathbf{B}^n$ là quả cầu đơn vị mở trong $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{B}^n_r$ là quả cầu bán kính $r$, tâm tại $0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{B}^n_r(x_0)$ là quả cầu bán kính $r$, tâm tại $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{S}^{n-1}$ là mặt cầu đơn vị trong $\mathbb{R}^n$, và $\mathcal{B}_{n\times n}$ là quả cầu đơn vị trong $\mathbf{M}_{n\times n}$.

$\|x\| = (|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$, với $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\|A\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$, với $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$.

$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}^2\| \right)^{\frac{1}{2}}$, với $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbf{M}_{m\times n}$.

$\|A\|_{\max} = \max\limits_{i,j} |a_{ij}|$, với $A = (a_{ij})_{m\times n} \in \mathbf{M}_{m\times n}$.

Chuẩn ma trận có một số tính chất sau:

(*i*) Nếu $A \in \mathbf{M}_{n\times n}$ khả nghịch thì $\|A^{-1}\| = \dfrac{1}{\min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\|}$.

(*ii*) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, $\|AB\|_F \leq \|A\|_F\|B\|_F$.

(*iii*) $\|A\| \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|$, với $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$.

(*iv*) $\|A\|_{\max} \leq \|A\| \leq \sqrt{mn}\|A\|_{\max}$, với mọi $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$.

(*v*) Với mọi $A \in \mathbf{M}_{m\times n}$ và $x \in \mathbb{R}^n$ ta có $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

**Định lý 1.2.1.** *Nếu $A$ là ma trận không suy biến và $r = \|A^{-1}E\| < 1$, thì $A + E$ là không suy biến và*

$$\|(A + E)^{-1} - A^{-1}\| \leq \|E\|\|A^{-1}\|^2/(1 - r).$$

*Chứng minh.* Xem [G-L, Theorem 2.3.4]. □

### 1.2.2 Jacobi suy rộng

**Định nghĩa 1.2.2.** Ánh xạ $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ được gọi là **Lipschitz** trong lân cận của điểm $x_0 \in \mathbb{R}^m$ nếu tồn tại hằng số $K > 0$ sao cho với mọi $x$ và $y$ gần $x_0$, ta có

$$\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|.$$

Khi đó $f$ được gọi là $K$**-Lipschitz**.

**Định lý 1.2.3** (Rademacher)**.** *Nếu $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ là $K$-Lipschitz thì $f$ khả vi hầu khắp nơi.*

*Chứng minh.* Xem [F, Ch.3 Theorem 3.1.6]. □

Giả sử $f$ là $K$-Lipschitz. Theo định lý Rademacher, ta có định nghĩa sau:

**Định nghĩa 1.2.4** (F. H. Clarke - [C1], [C2])**. Jacobi suy rộng** của $f$ tại $x_0$, ký hiệu $\partial f(x_0)$, là bao lồi của các ma trận $M$ dạng

$$M = \lim_{i \to \infty} Jf(x_i),$$

$x_i$ hội tụ đến $x_0$, $f$ là khả vi tại $x_i$ với mỗi $i$ và $Jf(x_i)$ là Jacobi của $f$ tại $x_0$.

Khi $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ là hàm số thì $\partial f(x)$ được gọi là **gradient tổng quát** của $f$ tại $x$.

**Định nghĩa 1.2.5.** $\partial f(x_0)$ được gọi là có **hạng cực đại** nếu mọi $M \in \partial f(x_0)$ có hạng cực đại.

### 1.2.3 Không gian các ánh xạ Lipschitz

Cho $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Ta gọi

$$\mathrm{L}(f) = \sup \left\{ \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|},\ x \neq y \right\},$$

là hệ số Lipschitz của $f$.

Chú ý rằng $f$ là Lipschitz nếu và chỉ nếu $\mathrm{L}(f) < \infty$.

Đặt

$$\mathrm{Lip}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n : \mathrm{L}(f) < +\infty\}.$$

Cho $f, g \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ và $\alpha \in \mathbb{R}$, ta có các tính chất sau:

$(i)$ $f + g, \alpha f \in \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

$(ii)$ $\mathrm{L}(f) \geq 0$.

$(iii)$ $\mathrm{L}(f + g) \leq \mathrm{L}(f) + \mathrm{L}(g)$.

$(iv)$ $\mathrm{L}(\alpha f) = \alpha \mathrm{L}(f)$.

$(v)$ $\mathrm{L}(f) = 0 \Leftrightarrow f = \text{constant}$.

Với $x_0 \in \mathbb{R}^m$, đặt

$$\mathrm{Lip}_{x_0}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \Big\{f : f \text{ Lipschitz và } f(x_0) = 0\Big\}.$$

Khi đó

$$L(f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0, \text{ với mọi } f \in \mathrm{Lip}_{x_0}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n).$$

Như vậy $\mathrm{Lip}_{x_0}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ là một không gian vector định chuẩn với chuẩn là $\mathrm{L}(\cdot)$.

## 1.3 Định lý hàm ngược định lượng cho ánh xạ Lipschitz

Phần này phát biểu một dạng định lượng cho định lý hàm ngược Lipschitz của F. H. Clarke (1976 - [C1]).

**Định lý 1.3.1.** *Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ $K$-Lipschitz trong lân cận $x_0$. Giả sử rằng $\partial f(x_0)$ có hạng cực đại, đặt*

$$\delta = \frac{1}{2} \inf_{M_0 \in \partial f(x_0)} \frac{1}{\|M_0^{-1}\|},$$

*r được chọn sao cho $f$ là $K$-Lipschitz và $\partial f(x) \subset \partial f(x_0) + \delta \mathcal{B}_{n\times n}$, khi $x \in \mathbf{B}^n_r(x_0)$. Khi đó $f$ là khả nghịch trong $\mathbf{B}^n_{\frac{r\delta}{2K}}(x_0)$ và tồn tại duy nhất ánh xạ ngược*

$$g : \mathbf{B}^n_{\frac{r\delta}{2}}(f(x_0)) \to \mathbb{R}^n$$

*là $\frac{1}{\delta}$-Lipschitz.*

Định lý được chứng minh tương tự [C1, Theorem 1] nhưng thay [C1, Lemma 3] bởi Bổ đề 1.3.5.

Trước hết ta có các kết quả sau với các giả thiết của Định lý 1.3.1 được thỏa:

**Mệnh đề 1.3.2** ([C1])**.** *$\partial f(x_0)$ là tập con khác trống, lồi, compact của $\mathbf{M}_{n\times n}$.*

**Bổ đề 1.3.3** ([C1])**.** *Cho $\varepsilon$ là một số dương. Khi đó*

$$\partial f(x) \subset \partial f(x_0) + \varepsilon \mathcal{B}_{n\times n},$$

*với mọi $x$ đủ gần $x_0$.*

Ta giả sử rằng $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ là một hàm lớp $C^1$, hàm $f$ là Lipschitz gần $x$.

**Bổ đề 1.3.4** ([C1])**.**

$$\partial(h \circ f)(x) \subset \nabla h(f(x))\partial f(x).$$

**Bổ đề 1.3.5.** *Với mọi vector đơn vị $v$ trong $\mathbb{R}^n$, tồn tại một vector đơn vị $w$ trong $\mathbb{R}^n$ sao cho nếu $x \in x_0 + r\mathbf{B}^n$ và $M \in \partial f(x)$ thì*

$$\langle w, Mv\rangle \geq \delta. \tag{1.1}$$

*Chứng minh.* Bởi Mệnh đề 1.3.2 và $\partial f(x_0)$ có hạng cực đại, tập con $\partial f(x_0)\mathbf{S}^{n-1}$ của $\mathbb{R}^n$ là compact và không chứa 0. Lấy $M_0 \in \partial f(x_0)$. Ta có

$$\min_{\|x\|=1} \|M_0 x\| = \frac{1}{\|M_0^{-1}\|}.$$

Do đó với $\delta$ đã cho, ta nhận được

$$\operatorname{dist}\big(\partial f(x_0)\mathbf{S}^{n-1}, 0)\big) = 2\delta.$$

Đặt

$$G = \partial f(x_0) + \varepsilon \mathcal{B}_{n\times n}.$$

Khi đó nếu $M \in G$ thì

$$\min_{\|x\|=1} \|Mx\| \geq \min_{\|x\|=1} \|M_0 x\| - \varepsilon.$$

Do vậy nếu chọn $\varepsilon = \delta$, ta nhận được

$$\operatorname{dist}(0, G\mathbf{S}^{n-1}) \geq \delta.$$

Bởi Bổ đề 1.3.3, tồn tại số dương $r$ sao cho

$$\text{Nếu } x \in x_0 + r\mathbf{B}^n \text{ thì } \partial f(x) \subset G. \tag{1.2}$$

Như vậy, với mọi vector đơn vị $v$ tùy ý đã cho, áp dụng kết quả trên, ta nhận được $\operatorname{dist}(0, Gv) \geq \delta$. Bởi Định lý tách các tập lồi, tồn tại một vector đơn vị $w$ sao cho

$$\langle w, \gamma v\rangle \geq \delta,$$

với mọi $\gamma \in G$. Từ đó, áp dụng (1.2) ta nhận được (1.1). □

**Bổ đề 1.3.6.** *Nếu $x$ và $y$ thuộc $x_0 + r\overline{\mathbf{B}^n}$ thì*

$$|f(x) - f(y)| \geq \delta |x - y|.$$

*Chứng minh.* Chứng minh tương tự [C1, Lemma 4] nhưng thay [C1, Lemma 3] bởi Bổ đề 1.3.5. □

**Bổ đề 1.3.7.** *$f(x_0) + (\frac{r\delta}{2})\mathbf{B}^n \subset f(x_0 + r\mathbf{B}^n)$.*

*Chứng minh.* Chứng minh tương tự [C1, Lemma 5] nhưng thay [C1, Lemma 3] bởi Bổ đề 1.3.5. □

*Chứng minh Định lý 1.3.1.* Theo Bổ đề 1.3.7, ta đặt $V = f(x_0) + (r\delta/2)\mathbf{B}^n$ và định nghĩa $g$ trên $V$ như sau: $g(v)$ là duy nhất $x$ trong $x_0 + r\mathbf{B}^n$ sao cho $f(x) = v$. Ta chọn $U$ là một lân cận tùy ý của $x_0$ thỏa $f(U) \subset V$. Từ Bổ đề 1.3.6 ta nhận được $g$ là Lipschitz với hằng số $1/\delta$, từ đó ta nhận được kết quả định lý. □

**Nhận xét 1.3.8.** Khi $f$ thuộc lớp $C^1$, $\partial f(x_0)$ chính là $Jf(x_0)$, và hàm $g$ thuộc lớp $C^1$. Do vậy ta nhận được dạng định lượng của định lý hàm ngược cổ điển.

## 1.4 Định lý hàm ẩn định lượng cho ánh xạ Lipschitz

Trước hết, ta có nhận xét sau.

**Nhận xét 1.4.1.** Cho $A = U \times V$ là tập con mở của $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Khi đó nếu $F : A \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ Lipschitz trong một lân cận của $(x_0, y_0) \in A$ thì Jacobi suy rộng của $F$ tại $(x_0, y_0)$ thỏa

$$\partial F(x_0, y_0) \subset \left\{ \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \end{pmatrix} : M_1 \in \partial_1 F(x_0, y_0), M_2 \in \partial_2 F(x_0, y_0) \right\},$$

ở đây $\partial_1 F(x_0, y_0)$ và $\partial_2 F(x_0, y_0)$ là các Jacobi suy rộng của

$$F(\cdot, y_0) : U \to \mathbb{R}^n \text{ và } F(x_0, \cdot) : U \to \mathbb{R}^n$$

tại $x_0$ và $y_0$ tương ứng.

**Định lý 1.4.2.** *Cho $A = U \times V$ là một tập con mở của $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ và $F : A \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ $K$-Lipschitz trong một lân cận của $(x_0, y_0) \in A$. Giả sử rằng $\partial_2 F(x_0, y_0)$ có hạng cực đại và $F(x_0, y_0) = 0$. Đặt*

$$\delta = \frac{1}{2} \inf_{M_2 \in \partial_2 F(x_0, y_0)} \frac{1}{(m + (1 + mK^2)n \|M_2^{-1}\|^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

*Lấy $r > 0$ sao cho $F$ thỏa điều kiện $K$-Lipschitz và $\partial F(x, y) \subset \partial F((x_0, y_0)) + \delta \mathcal{B}_{n \times n}$ trong $\mathbf{B}_r^n((x_0, y_0))$. Khi đó tồn tại lân cận $U_0 = \mathbf{B}^n_{\frac{r\delta}{2(K+1)}}(x_0)$ của $x_0$ và tồn tại duy nhất ánh xạ Lipschitz $g : U_0 \to V$ sao cho $g(x_0) = y_0$ và*

$$F(x, g(x)) = 0$$

*với mọi $x \in U_0$. Hơn nữa,*

$$L(g) \leq \sup_{M_2 \in \partial_2 F(x_0, y_0)} K \|M_2^{-1}\|.$$

*Chứng minh.* Chứng minh được chia thành các bước.

**Bước 1.** Đặt $f(x, y) = (x, F(x, y))$, với mọi $(x, y) \in U \times V$. Từ $F$ là $K$-Lipschitz, theo định lý Radamacher, tồn tại Jacobi suy rộng của $F$ tại $(x_0, y_0)$. Trong lân cận của $(x_0, y_0)$, $F$ là khả vi hầu khắp nơi, do vậy tồn tại Jacobi suy rộng của $f$ tại $(x_0, y_0)$ và

$$\partial f(x_0, y_0) \subset \left\{ \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix} : \quad M_1 \in \partial_1 F(x_0, y_0), \quad M_2 \in \partial_2 F(x_0, y_0) \right\}.$$

Do $\partial_2 F(x_0, y_0)$ có hạng cực đại, khi đó $\partial f(x_0, y_0)$ có hạng cực đại.

**Bước 2.** Giả sử

$$M = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ M_1 & M_2 \end{pmatrix} \in \partial f(x_0, y_0).$$

Ta có

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -M_2^{-1} M_1 & M_2^{-1} \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} \|M^{-1}\| \le \|M^{-1}\|_F &= \left(m + \|M_2^{-1} M_1\|_F^2 + \|M_2^{-1}\|_F^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(m + \|M_2^{-1}\|_F^2 (\|M_1\|_F^2 + 1)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(m + \|M_2^{-1}\|_F^2 (m\|M_1\|^2 + 1)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le \left(m + (1 + mK^2)\|M_2^{-1}\|_F^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Do vậy

$$\frac{1}{\|M^{-1}\|} \ge \frac{1}{\left(m + (1 + mK^2)\|M_2^{-1}\|_F^2\right)^{\frac{1}{2}}} \ge \frac{1}{\left(m + (1 + mK^2) n \|M_2^{-1}\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Đặt

$$\Delta = \frac{1}{2} \inf_{M \in \partial f(x_0, y_0)} \frac{1}{\|M^{-1}\|}.$$

Ta nhận được

$$\Delta \ge \delta. \tag{1.3}$$

**Bước 3.** Theo giả thiết ta có

$$\partial F(x, y) \subset \partial F(x_0, y_0) + \delta \mathcal{B}_{n \times n}, \text{ khi } (x, y) \in \mathbf{B}_r^{m+n}((x_0, y_0)).$$

Từ (1.3) ta nhận được

$$\partial F(x, y) \subset \partial F(x_0, y_0) + \Delta \mathcal{B}_{n \times n}, \text{ khi } (x, y) \in \mathbf{B}_r^{m+n}((x_0, y_0)).$$

Do vậy ta có thể chọn $r$ sao cho $f$ thỏa điều kiện $K$-Lipschitz và

$$\partial f(x,y) \subset \partial f(x_0,y_0) + \Delta \mathcal{B}_{n\times n}, \text{ khi } (x,y) \in \mathbf{B}_r^{m+n}((x_0,y_0)).$$

**Bước 4.** Từ $F$ là Lipschitz với hằng số Lipschitz $K$, ta có

$$\begin{aligned}
\|f(x,y) - f(x',y')\| &\leq \|x - x'\| + \|F(x,y) - F(x',y')\| \\
&\leq \|x - x'\| + K\|(x,y) - (x',y')\| \\
&\leq (1+K)\|(x,y) - (x',y')\|.
\end{aligned}$$

Như vậy $f$ là $(K+1)$-Lipschitz.

Áp dụng Định lý 1.3.1, $f$ là khả nghịch địa phương và

$$f^{-1}(x,z) = (x, h(x,z)),$$

với $h$ là ánh xạ Lipschitz. Ta định nghĩa

$$g(x) = h(x,0).$$

Khi đó $g$ là Lipschitz và

$$(x, F(x,g(x))) = f(x,g(x)) = f(x,h(x,0)) = f(f^{-1}(x,0)) = (x,0).$$

**Bước 5.** Ước lượng lân cận $U_0$ của $x_0$ và hằng số Lipschitz $L(g)$:

Áp dụng Định lý 1.3.1, ta được

$$(x, h(x,z)) \in U = \mathbf{B}^{m+n}_{\frac{r\Delta}{2(K+1)}}\left((x_0,y_0)\right).$$

Do vậy

$$(x, g(x)) \in U' = \mathbf{B}^{m+n}_{\frac{r\Delta}{2(K+1)}}\left((x_0,0)\right).$$

Từ đó, bởi (1.3), định lý được thỏa với mọi $(x,g(x)) \in U'' = \mathbf{B}^{m+n}_{\frac{r\delta}{2(K+1)}}\left((x_0,0)\right)$. Gọi $U_0$ là chiếu của $U''$ lên không gian $\mathbb{R}^m$, ta nhận được

$$U_0 = \mathbf{B}^{n}_{\frac{r\delta}{2(K+1)}}\left(x_0\right).$$

Hơn nữa, áp dụng công thức đạo hàm hàm ẩn

$$Dg = -\frac{\partial F^{-1}}{\partial y}.\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \text{khi} \quad \frac{\partial F^{-1}}{\partial y}.\frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{tồn tại.}$$

Do vậy

$$L(g) \leq \sup_{M_2 \in \partial_2 F(x_0, y_0)} K\|M_2^{-1}\|.$$

□

**Nhận xét 1.4.3.** Khi $F$ là $C^1$, $\partial_2 F(x_0, y_0)$ chính là $J_2F(x_0, y_0)$, và $g$ cũng là một ánh xạ lớp $C^1$. Do vậy ta nhận được dạng định lượng của định lý hàm ẩn cổ điển.

**Ví dụ 1.4.4.** Cho $F : \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, (y, z)) = (2x + |y| + 3y, 2x + |z| + 3z)$ trong $\mathbf{B}^3((0, (0, 0)))$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\|F(x, (y, z)) - F(x', (y', z'))\| &= \|(2(x - x') + (|y| - |y'|) + 3(y - y'),\\
&\quad 2(x - x') + (|z| - |z'|) + 3(z - z'))\|\\
&\leq (24((x - x')^2 + 6(|y| - |y'|)^2 + 18(y - y')^2 +\\
&\quad 6(|z| - |z'|)^2 + 18(z - z')^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq (24((x - x')^2 + 24(y - y')^2 + 24(z - z')^2)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \sqrt{24}\|(x, (y, z)) - (x', (y', z'))\|.
\end{aligned}$$

Vậy $F$ là $\sqrt{24}$-Lipschitz.

Ta có

$$J_2F(x_i, (y_i, z_i)) = \begin{pmatrix} \frac{|y_i|}{y_i} + 3 & 0 \\ 0 & \frac{|z_i|}{z_i} + 3 \end{pmatrix}, \quad (x_i, (y_i, z_i)) \text{ gần } (0, (0, 0)).$$

Do đó

$$\partial_2 F(0, (0, 0)) = \left\{ \begin{pmatrix} s + 3 & 0 \\ 0 & t + 3 \end{pmatrix} : -1 \leq s \leq 1, -1 \leq t \leq 1 \right\},$$

và $\partial_2 F(0, (0, 0))$ có hạng cực đại.

Cho

$$M_2 = \begin{pmatrix} s + 3 & 0 \\ 0 & t + 3 \end{pmatrix} \in \partial_2 F(0, (0, 0)).$$

Khi đó

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{t+3} \end{pmatrix}.$$

Vậy

$$\delta = \frac{1}{2} \inf_{M_2 \in \partial_2 F(x_0, y_0)} \frac{1}{(m + (1 + mK^2)n\|M_2^{-1}\|^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{54}}.$$

Hơn nữa,

$$JF(x, (y, z)) = \begin{pmatrix} 2 & \frac{|y|}{y} + 3 & 0 \\ 2 & 0 & \frac{|z|}{z} + 3 \end{pmatrix}, \ (x, (y, z)) \text{ gần } (0, (0, 0)).$$

Ta có thể chọn $r = 1$, và khi đó

$$\partial F(x, (y, z)) \subset \partial F(0, (0, 0)) + \frac{1}{\sqrt{54}} \mathcal{B}_{n \times n}, \text{ khi } (x, (y, z)) \in \mathbf{B}^3((0, (0, 0))).$$

Từ đó, áp dụng Định lý 1.4.2, tồn tại lân cận $U_0 = \mathbf{B}^1_{\frac{1}{6\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{1+2\sqrt{6}}}(0)$ của 0 và tồn tại duy nhất ánh xạ Lipschitz $g : U_0 \to V$ sao cho $g(0) = (0, 0)$ và

$$F(x, g(x)) = (0, 0), \quad \text{với mọi } x \in U_0,$$

hơn nữa $L(g) \leq \sqrt{6}$.

**Nhận xét 1.4.5.** Kỹ thuật chứng minh của Định lý 1.4.2 khác với chứng minh của [PA, Theorem 3.1] về định lý hàm ẩn cho ánh xạ Lipschitz, các điều kiện của hai định lý là tương đương. Tuy nhiên các tham số định lượng trong Định lý 1.4.2 là tường minh và có thể đánh giá chi tiết như Ví dụ 1.4.4.

## 1.5 Tính mở của lớp các ánh xạ Lipschitz thỏa định lý hàm ngược Clarke

**Định lý 1.5.1.** *Cho $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ Lipschitz trong lân cận của $x_0 \in \mathbb{R}^n$ và thỏa*

$$K\|x - y\| \leq \|f_0(x) - f_0(y)\| \leq K'\|x - y\|, \ K, K' > 0.$$

*Giả sử $\partial f_0(x_0)$ có hạng cực đại. Cho $f = f_0 + h$, với $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ L-Lipschitz sao cho*

$$L < K.$$

*Đặt*

$$\delta = \frac{1}{2} \inf_{M_0 \in \partial f(x_0)} \frac{1}{\|M_0^{-1}\|}.$$

*Lấy $r > 0$ sao cho $f$ thỏa điều kiện Lipschitz và $\partial f(x) \subset \partial f(x_0) + \delta \mathcal{B}_{n\times n}$ trong $\mathbf{B}^n_r(x_0)$. Khi đó tồn tại các lân cận $U = \mathbf{B}^n_{\frac{r\delta}{2(K'+L)}}(x_0)$ và $V = \mathbf{B}^n_{\frac{r\delta}{2}}(f(x_0))$ tương ứng của $x_0$ và $f(x_0)$, và tồn tại duy nhất ánh xạ ngược Lipschitz $g : V \to \mathbb{R}^n$ để cho*

*(i) $g(f(u)) = u$ với mọi $u \in U$,*

*(ii) $f(g(v)) = v$ với mọi $v \in V$.*

*Hơn nữa, $L(g) = \frac{1}{\delta}$.*

*Chứng minh.* $f$ khả vi tại $x_i$ khi và chỉ khi $f$ có thể xấp xỉ bậc nhất trong lân cận của $x_i$ bởi ánh xạ affin

$$T(x) = f(x_i) + Jf(x_i)(x - x_i).$$

Do đó

$$K\|x - x_i\| \le \|f(x) - f(x_i)\| \approx \|Jf(x_i)(x - x_i)\| \le K'\|x - x_i\|.$$

Suy ra

$$K \le \inf_{y\neq 0} \frac{\|Jf(x_i)y\|}{\|y\|}, \forall Jf(x_i) \Rightarrow K \le \inf_{Jf(x_i)} \left( \min_{\|x\|=1} \|Jf(x_i)x\| \right), \qquad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \sup_{y\neq 0} \tfrac{\|Jf(x_i)y\|}{\|y\|} \le K', \forall Jf(x_i) \quad &\Rightarrow \quad \sup_{Jf(x_i)} \left( \max_{\|x\|=1} \|Jf(x_i)x\| \right) \le K' \\ &\Rightarrow \quad \sup_{Jf(x_i)} \|Jf(x_i)\| \le K'. \end{aligned} \qquad (1.5)$$

Từ nhận xét trên ta chứng minh $f$ Lipschitz và $\partial f(x_0)$ có hạng cực đại.

Ta có

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \|(f_0(x) - f_0(y)) + (h(x) - h(y))\| \\ &\le \|(f_0(x) - f_0(y))\| + \|(h(x) - h(y))\| \\ &\le (K' + L)\|x - y\|. \end{aligned}$$

Vậy $f$ là Lipschitz với hệ số $K' + L$.

Theo Định lý Rademacher $f$ khả vi hầu khắp nơi. Do đó tồn tại Jacobi suy rộng $\partial f(x_0)$; hơn nữa

$$\partial f(x_0) \subset \partial f_0(x_0) + \partial h(x_0).$$

Thật vậy, đặt $E$ là tập các điểm mà tại đó $f_0$ hoặc $h$ không khả vi. Khi đó mọi $M \in \partial f(x_0), M$ có dạng

$$M = \lim_{i\to\infty} J(f_0 + h)(x_0 + h_i), h_i \to 0 \text{ khi } i \to \infty,$$

ở đây dãy $\{x_0 + h_i\}$ thuộc phần bù của $E$, do vậy nó sinh ra một dãy con $\{x_0 + h_{n_i}\}$ sao cho cả hai dãy $Jf_0(x_0 + h_{n_i})$ và $Jh(x_0 + h_{n_i})$ đều hội tụ. Do đó

$$M = \lim_{i\to\infty} Jf_0(x_0 + h_{n_i}) + \lim_{i\to\infty} Jh(x_0 + h_{n_i}) = M_0 + H,$$

với $M_0 \in \partial f_0(x_0), H \in \partial h(x_0)$.

Tiếp theo, ta chứng minh $\partial f(x_0)$ có hạng cực đại:
Áp dụng (1.4) và (1.5) ta có

$$\begin{array}{rcl} L < K \;\Rightarrow\; \sup_{H\in\partial h(x_0)} \|H\| & < & \inf_{M_0\in\partial f_0(x_0)} \left(\min_{\|x\|=1} \|M_0x\|\right) \\ \Rightarrow\; \sup_{H\in\partial h(x_0)} \|H\| & < & \inf_{M_0\in\partial f_0(x_0)} \left(\frac{1}{\frac{1}{\min_{\|x\|=1} \|M_0x\|}}\right) \\ \Rightarrow\; \sup_{H\in\partial h(x_0)} \|H\| & < & \frac{1}{\sup_{M_0\in\partial f_0(x_0)}\left(\frac{1}{\min_{\|x\|=1} \|M_0x\|}\right)} \\ \Rightarrow\; \sup_{H\in\partial h(x_0)} \|H\| & < & \frac{1}{\sup_{M_0\in\partial f_0(x_0)} \|M_0^{-1}\|}. \end{array}$$

Vậy

$$\sup_{H\in\partial h(x_0), M_0\in\partial f_0(x_0)} \|M_0^{-1}H\| < 1.$$

Theo Định lý 1.2.1, $M_0 + H$ có hạng cực đại với mọi $H \in \partial h(x_0), M_0 \in \partial f_0(x_0)$. Theo chứng minh trên, nếu $M \in \partial f(x_0)$ thì $M = M_0 + H$, với $M_0 \in \partial f_0(x_0)$, $H \in \partial h(x_0)$. Do vậy $M$ có hạng cực đại với mọi $M \in \partial f(x_0)$. Vậy $\partial f(x_0)$ có hạng cực đại.

Như vậy $f$ là Lipschitz và $\partial f(x_0)$ có hạng cực đại. Áp dụng Định lý 1.3.1 ta nhận được kết quả của định lý.

Hơn nữa, theo chứng minh Định lý 1.3.1, ta có

$$U = \mathbf{B}^n_{\frac{r\delta}{2(K'+L)}}(x_0)\,,\ V = f(x_0) + (r\delta/2)\mathbf{B}^n = \mathbf{B}^n_{\frac{r\delta}{2}}(f(x_0)) \text{ và } L(g) = \frac{1}{\delta}.$$

□

**Hệ quả 1.5.2.** *Lớp các ánh xạ Lipschitz thỏa định lý hàm ngược Clarke là mở trong không gian* $Lip_{x_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

*Chứng minh.* Áp dụng Định lý 1.3.1 với ánh xạ $f_0$ thỏa $f_0(x_0) = 0$. □

**Ví dụ 1.5.3.** Cho $n = 2$, xét hàm $f_0(x, y) = (|x| + 2x, |y| + 2y)$ trong $\mathbf{B}^2((0, 0))$. Ta có

$$Jf_0(x_i, y_i) = \begin{pmatrix} \frac{|x_i|}{x_i} + 2 & 0 \\ 0 & \frac{|y_i|}{y_i} + 2 \end{pmatrix}, \quad (x_i, y_i) \text{ gần } (0,0), x_i \neq 0, y_i \neq 0.$$

Vậy

$$\partial f_0(0, 0) = \left\{ \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & t+2 \end{pmatrix} : -1 \leq s \leq 1, -1 \leq t \leq 1 \right\},$$

và $\partial f_0(0, 0)$ có hạng cực đại.

Ta có

$$\begin{aligned} \|f_0(x, y) - f_0(x', y')\| &= \|(|x| + 2x, |y| + 2y) - (|x'| + 2x', |y'| + 2y')\| \\ &= \|((|x| - |x'|) + 2(x - x'), (|y| - |y'|) + 2(y - y'))\|. \end{aligned}$$

Do đó

$$\|(x, y) - (x', y')\| \leq \|f_0(x, y) - f_0(x', y')\| \leq 3\|(x, y) - (x', y')\|.$$

Như vậy, $f_0$ là Lipschitz với hệ số $K = 1, K' = 3$.

Cho hàm $h(x, y) = (\frac{1}{2}|x|, \frac{1}{2}|y|)$. Khi đó $h$ là Lipschitz với hệ số $L = \frac{1}{2}$ thỏa

$$L < K.$$

Đặt $f = f_0 + h$, ta có

$$f(x, y) = (\frac{3}{2}|x| + 2|x|, \frac{3}{2}|y| + 2y),$$

và $f$ là Lipschitz trong $\mathbf{B}^2((0,0))$ với hệ số Lipschitz $L(f) = \frac{7}{2}$.

Khi đó

$$Jf(x_i, y_i) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\frac{|x_i|}{x_i} + 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\frac{|y_i|}{y_i} + 2 \end{pmatrix}, \quad (x_i, y_i) \text{ gần } (0,0), x_i \neq 0, y_i \neq 0,$$

$$\partial f(0,0) = \left\{ \begin{pmatrix} s+2 & 0 \\ 0 & t+2 \end{pmatrix} : -\frac{3}{2} \leq s \leq \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \leq t \leq \frac{3}{2} \right\},$$

và $\partial f(0,0)$ có hạng cực đại.

Vậy $f = f_0 + h$ là khả nghịch địa phương. Ta có

$$\delta = \frac{1}{2} \inf_{M_0 \in \partial f(x_0)} \frac{1}{\|M_0^{-1}\|} = 1.$$

Hơn nữa,

$$Jf(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\frac{|x|}{x} + 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\frac{|y|}{y} + 2 \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbf{B}_r^2((0,0)), \ r \leq 1, x \neq 0, y \neq 0.$$

Ta có thể chọn $r = 1$, khi đó

$$\partial f(x, y) \subset \partial f(0,0) + \mathcal{B}_{2\times 2}, \quad \text{khi} \quad (x, y) \in \mathbf{B}_r^2((0,0)).$$

Do đó

$$U = \mathbf{B}_{\frac{1}{7}}^2((0,0)), \qquad V = \mathbf{B}_{\frac{1}{2}}^2((0,0)), \quad \text{và} \quad L(g) = 1.$$

**Kết luận của Chương 1**

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Định lý hàm ngược định lượng cho ánh xạ Lipschitz (Định lý 1.3.1).

- Định lý hàm ẩn định lượng cho ánh xạ Lipschitz (Định lý 1.4.2).

- Chứng minh tính mở của lớp các ánh xạ Lipschitz thỏa định lý hàm ngược Clarke (Định lý 1.5.1).

# Chương 2

# ĐỊNH LÝ SARD VÀ ĐỊNH LÝ MORSE ĐỊNH LƯỢNG

## 2.1 Giới thiệu

Một trong những kết quả đầu tiên và cơ sở của lý thuyết kỳ dị đó là Định lý Sard (A. Sard - 1942, xem [Sa]) và Định lý Morse (M. Morse - 1931, xem [Morse]). Các định lý này nghiên cứu về điểm tới hạn và giá trị tới hạn của hàm trơn $f : M \to \mathbb{R}$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Định lý Sard: tập các giá trị tới hạn của $f$ có độ đo Lebesgue bằng 0.

Định lý Morse mô tả các kỳ dị đủ tổng quát của $f$:

($i$) Tất cả các điểm tới hạn $x_i$ của $f$ là không suy biến. Do vậy số các điểm tới hạn này là hữu hạn nếu $M$ compact.

($ii$) Nếu $x_i$ và $x_j$ là các điểm tới hạn khác nhau thì $f(x_i) \neq f(x_j)$.

($iii$) Gần mỗi điểm tới hạn $x_i$ có một phép biến đổi tọa độ với hệ tọa độ mới $y_1, \dots, y_n$, có tâm tại $x_i$ sao cho

$$f(y_1, \dots, y_n) = y_1^2 + \cdots + y_l^2 - y_{l+1}^2 - \cdots - y_n^2 + const.$$

Việc nghiên cứu mở rộng, đánh giá định lượng và ứng dụng của Định lý Sard được quan tâm nhiều bởi các ứng dụng của nó trong Toán học. Y. Yomdin (1983 -

[Y3]) đã đưa ra khái niệm điểm gần tới hạn và giá trị gần tới hạn của một ánh xạ khả vi. Đến nay có nhiều kết quả nghiên cứu về đánh giá định lượng cho các điểm và các giá trị gần tới hạn. Y. Yomdin (1983 - [Y3]) đã chứng minh Định lý Sard định lượng cho các ánh xạ lớp $C^k$. Kết quả đưa ra đánh giá chặn trên cho entropy (số quả cầu phủ một tập, xem Định nghĩa 2.2.5) của tập các giá trị $\Lambda$-tới hạn (xem Định nghĩa 2.2.3). Y. Yomdin (1987 - [Y2], 2005 - [Y1]), Y. Yomdin và G. Comte (2004 - [Y-C]) đã đưa ra một số dạng cải tiến của Định lý Sard định lượng. Hơn nữa, kết quả đã cho một số đánh giá tường minh trong các trường hợp hàm khả vi lớp $C^k$. Ngoài ra, A. Rohde (1997 - [Roh]) đã chứng minh định lý Sard cho lớp các hàm không trơn.

Đối với Định lý Morse, Y. Yomdin (2005 - [Y1]) đã phát biểu Định lý Morse định lượng cho các hàm khả vi. Tuy nhiên trong bài báo này, Y. Yomdin chỉ nêu một vài gợi ý chứng minh, mà không đưa ra chứng minh chi tiết. Cho đến nay, có lẽ Y. Yomdin cũng chưa công bố chứng minh của Định lý Morse định lượng.

Một dạng định lượng khác của Định lý Morse đã được L. Niederman (2004 - [N]) chứng minh cho các hàm Morse Diophantine.

Trong chương này, áp dụng các kết quả về Đại số tuyến tính, luận án chứng minh Bổ đề Morse định lượng (Bổ đề 2.3.1). Từ đó đươc ra một chứng minh chi tiết cho định lý Morse định lượng được phát biểu bởi Y. Yomdin (2005) (Định lý 2.5.1). Định lý được chứng minh dựa trên Định lý Sard định lượng, Định lý hàm ngược định lượng cho ánh xạ Lipschitz và Bổ đề Morse định lượng.

Nội dung của chương như sau. Phần 2 trình bày các kiến thức cơ sở; Phần 3 chứng minh bổ đề Morse định lượng; Phần 4 trình bày dạng định lượng của Định lý Sard. Trong phần 5 chúng tôi đưa ra chứng minh của Định lý Morse định lượng.

## 2.2 Các khái niệm, định nghĩa

Phần này giới thiệu các khái niệm: giá trị kỳ dị của ánh xạ tuyến tính, điểm gần tới hạn, giá trị gần tới hạn, metric entropy.

### 2.2.1 Giá trị kỳ dị của ánh xạ tuyến tính

**Định nghĩa 2.2.1.** Cho $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó tồn tại $\sigma_1(L) \geq \cdots \geq \sigma_r(L) > 0$, ở đây $r = \text{rank}L$, sao cho $L(\overline{\mathbf{B}}^n)$ là một ellipsoid $r$ chiều với các nửa trục là $\sigma_1(L) \geq \cdots \geq \sigma_r(L)$. Đặt $\sigma_0(L) = 1$ và $\sigma_{r+1}(L) = \cdots = \sigma_m(L) = 0$, khi $r < m$.

Ta gọi $\sigma_0(L), \ldots, \sigma_m(L)$ là các **giá trị kỳ dị** của $L$.

Khi cố định các cơ sở trong $\mathbb{R}^n$ và $\mathbb{R}^m$, một ánh xạ tuyến tính tương đương với một ma trận. Ta có chú ý sau:

**Chú ý 2.2.2.** Cho $A$ là một ánh xạ tuyến tính hay ma trận, ta có

($i$) $\sigma_{\max}(A) = \|A\| = \sigma_1(A) =$ giá trị kỳ dị lớn nhất của $A$,

$\sigma_{\min}(A) = \min\limits_{\|x\|=1} \|Ax\| =$ giá trị kỳ dị nhỏ nhất của $A$.

($ii$) Cho $A \in \mathbf{M}_{n\times n}$, gọi $\lambda_i$ là các giá trị riêng của $A$, $i = 1, \ldots, n$, khi đó

$$\sigma_{\min}(A) \leq \min_i |\lambda_i| \leq \max_i |\lambda_i| \leq \sigma_{\max}(A).$$

### 2.2.2 Điểm tới hạn và $\gamma$-tới hạn

**Định nghĩa 2.2.3.** Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là ánh xạ khả vi đến cấp $k$ ($k \geq 1$). Cho $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$, $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_m \geq 0$, ta gọi

$$\Sigma(f, \Lambda) = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_i(Df(x)) \leq \lambda_i, i = 1, \ldots, m\}$$

là tập **các điểm $\Lambda$-tới hạn** của $f$, và

$$\Delta(f, \Lambda) = f(\Sigma(f, \Lambda))$$

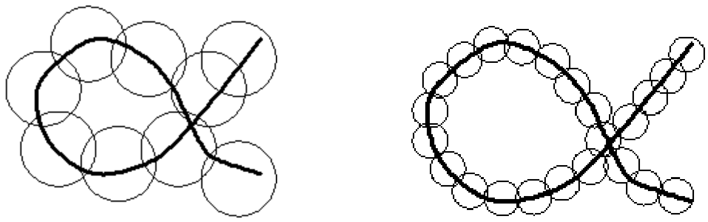
là tập **các giá trị $\Lambda$-tới hạn** của $f$.

Đặt $\Sigma(f, \Lambda, A) = \Sigma(f, \Lambda) \cap A$, $\Delta(f, \Lambda, A) = f(\Sigma(f, \Lambda, A))$, $A \subset \mathbb{R}^n$. Khi $\Lambda = (\gamma, \ldots, \gamma) \in \mathbb{R}^m_+$, một điểm $y \in \mathbb{R}^m$ được gọi là **giá trị $\gamma$-chính quy** của $f$ nếu $y \notin \Delta(f, \Lambda, A)$, nghĩa là $f^{-1}(y) = \emptyset$ hoặc nếu $x \in f^{-1}(y)$ thì $\sigma_i(Df(x)) \geq \gamma, i = 1, \ldots, m$.

**Chú ý 2.2.4.** Nếu $\Lambda = (0, \dots, 0)$ thì $\Sigma(f, 0)$ là tập **các điểm tới hạn** và $\Delta(f, 0)$ là tập **các giá trị tới hạn** của $f$.

## 2.2.3 Một số khái niệm khác

**Định nghĩa 2.2.5.** Cho $X$ là một không gian metric, $A \subset X$ là tập con compact tương đối. Với $\varepsilon > 0$, ký hiệu $M(\varepsilon, A)$ là số nhỏ nhất các quả cầu đóng bán kính $\varepsilon$ phủ $A$.



Hình 2.1: $M(\varepsilon, A)$

Từ định nghĩa ta có

(i) $A \subset B \Rightarrow M(\varepsilon, A) \leq M(\varepsilon, B)$.

(ii) $M(\varepsilon, \overline{A}) = M(\varepsilon, A)$, trong đó $\overline{A}$ là bao đóng của $A$.

(iii) Nếu $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$ thì $M(\varepsilon_1, A) \geq M(\varepsilon_2, A)$.

(iv) $M(\varepsilon, A \cup B) \leq M(\varepsilon, A) + M(\varepsilon, B)$, và nếu $\inf\limits_{x \in A, y \in B} d(x, y) = \delta > 0$, thì $M(\varepsilon, A \cup B) = M(\varepsilon, A) + M(\varepsilon, B)$, với mọi $0 < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$.

**Định nghĩa 2.2.6.** Cho $M \subset \mathbb{R}^n$ là đa tạp trơn, $f : M \to \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ khả vi lớp $C^k$. Khi đó $C^k$-chuẩn của $f$ được định nghĩa như sau

$$\|f\|_{C^k} = \sum_{j=1}^{k} \sup_{x \in M} \|D^j f(x)\|.$$

## 2.3 Bổ đề Morse định lượng

Ký hiệu $\mathrm{Sym}(n)$ là không gian các ma trận đối xứng thực cấp $n$.

**Bổ đề 2.3.1.** *Cho $A \in Sym(n)$. Giả sử $Q_0 \in Gl(n)$ sao cho*

$$^tQ_0 A Q_0 = diag(1, \dots, 1, -1, \dots, -1) = D_0.$$

*Đặt*

$$U(A) = \{B \in Sym(n) : \|B - A\| \leq \frac{1}{2n\|Q_0\|^2}\}.$$

*Khi đó tồn tại ánh xạ $\mathcal{P} : U(A) \to Gl(n) \in C^\omega$ thỏa*

$$P(A) = Q_0$$

*và*

$$\text{nếu } \mathcal{P}(B) = Q \text{ thì } {}^tQBQ = D_0.$$

*Chứng minh.* Cho $B \in U(A)$. Ta có

$$\begin{aligned} \|^tQ_0BQ_0 -^t Q_0AQ_0\|_{\max} &\leq \|^tQ_0(B-A)Q_0\| \\ &\leq \|Q_0\|^2\|B-A\| \\ &\leq \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Đặt $^tQ_0BQ_0 = (b_{ij})$. Ta có $|b_{ii}| > \sum_{j\neq i} |b_{ij}|$. Vậy $\det(b_{ij})_{1\leq i,j\leq k} \neq 0$, với mọi $k = 1, \dots, n$. Suy ra phép chuẩn hóa $^tQ_0BQ_0$ (xem [Hir, Lemma p.145]) đưa $^tQ_0BQ_0$ về dạng chuẩn tắc $D_0$ xác định ánh xạ $\mathcal{P} : U(A) \to Gl(n) \in C^\omega$ thỏa điều kiện của Bổ đề. □

**Nhận xét 2.3.2.** Việc biến đổi một ma trận đối xứng thực không suy biến $A$ về dạng chuẩn $D_0$ có thể được thực hiện bởi một ma trận $Q_0$ có dạng $Q_0 = SU$, ở đây $U$ là một ma trận trực giao và $S$ là một ma trận chéo. Vì vậy

$$\|Q_0\|^2 \leq \frac{1}{\sigma_{\min}(A)}.$$

## 2.4 Định lý Sard định lượng

Phần này giới thiệu các kết quả của Yomdin và Comte về định lý Sard định lượng cho ánh xạ lớp $C^k$. Định lý đánh giá chặn trên cho entropy của tập các giá trị gần tới hạn của $f$. Đây là một cơ sở để đưa đến chứng minh kết quả chính của chương Định lý Morse định lượng.

Xét ánh xạ $f : \mathbf{B}_r^n \to \mathbb{R}^m$ và $k = p + \alpha$, với $p \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$ và $\alpha \in (0;1]$. Ta nói rằng $f$ là một ánh xạ lớp $C^k = C^{p+\alpha}$ (trơn Hölder lớp $C^k$) nếu $f$ là $p$-khả vi và tồn tại một hằng số $K > 0$ sao cho

$$\|D^p f(x) - D^p f(y)\| \leq K\|x - y\|^\alpha, \text{ với mọi } x, y \in \mathbf{B}_r^n.$$

Ta ký hiệu

$$R_k(f) = \frac{K}{p!} r^k.$$

Chú ý rằng một ánh xạ lớp $C^k$ với $k \geq 2$ là một ánh xạ $(k-1)$-khả vi sao cho $x \mapsto D^{k-1} f(x)$ là Lipschitz.

**Định lý 2.4.1.** *Cho $f : \mathbf{B}_r^n \to \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ khả vi lớp $C^k$, $q := \min(m, n)$. Khi đó với $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$ và với $\varepsilon > 0$, ta có*

$$M\left(\varepsilon, \Delta\left(f, \lambda, \mathbf{B}_r^n\right)\right) \leq c \sum_{i=0}^{q} \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_i \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^i, \text{ nếu } \varepsilon \geq R_k(f)$$

$$M\left(\varepsilon, \Delta\left(f, \lambda, \mathbf{B}_r^n\right)\right) \leq \widetilde{c} \sum_{i=0}^{q} \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_i \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^i \left(\frac{R_k(f)}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-i}{k}}, \text{ nếu } \varepsilon < R_k(f),$$

*ở đây $c > 0$ và $\widetilde{c} > 0$ chỉ phụ thuộc vào $n, m$ và $k$.*

*Chứng minh.* Xem [Y-C, Theorem 9.2]. □

**Định lý 2.4.2.** *Cho $f : \mathbf{B}_r^n \to \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ lớp $C^k$, $q = \min(n, m)$, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_q)$, $\lambda_i > 0, i = 1, \dots, q$. Khi đó*

$$M(\varepsilon, \Delta(f, \Lambda, \mathbf{B}_r^n) \cap \mathbf{B}_\delta^m) \leq c \left(\frac{R_k(f)}{\varepsilon}\right)^{\frac{n}{k}} \sum_{i=0}^{q} \min\left(\lambda_0 \dots \lambda_i \left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^i \left(\frac{\varepsilon}{R_k(f)}\right)^{\frac{i}{k}}, \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^i\right),$$

*ở đây $c$ chỉ phụ thuộc vào $n, m$,và $k$.*

*Chứng minh.* Xem [Y-C, Theorem 9.6]. □

## 2.5 Định lý Morse định lượng

Phần này chúng tôi đưa ra chứng minh chi tiết của Định lý Morse định lượng được phát biểu bởi Y. Yomdin (2005).

**Định lý 2.5.1** ([Y1, Theorem 4.1, Theorem 6.1]). *Cố định $k \geq 3$. Giả sử $f_0 : \overline{\mathbf{B}}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi thuộc lớp $C^k$ trong một tập mở chứa $\overline{\mathbf{B}}^n$ với tất cả các đạo hàm đến cấp k bị chặn đều bởi $K$. Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, có thể tìm $h$ với $\|h\|_{C^k} \leq \varepsilon$ và các hàm dương $\psi_1, N, \psi_2, \psi_3, M$, $\eta$ phụ thuộc vào $K$ và $\varepsilon$, sao cho $f = f_0 + h$ thỏa các điều kiện sau:*

*(i)* *Tại mỗi điểm tới hạn $x_i$ của $f$, trị tuyệt đối nhỏ nhất của các giá trị riêng của Hessian $Hf(x_i)$ không bé hơn $\psi_1(K, \varepsilon) > 0$.*

*(ii)* *Cho $x_i$ và $x_j$ là hai điểm tới hạn khác nhau của $f$, $\|x_i - x_j\| \geq d(K, \varepsilon)$. Do vậy, số các điểm tới hạn không vượt quá $N(K, \varepsilon)$.*

*(iii)* *Cho $x_i$ và $x_j$ là hai điểm tới hạn khác nhau của $f$, $|f(x_i) - f(x_j)| \geq \psi_2(K, \varepsilon)$.*

*(iv)* *Cho $\delta = \psi_3(K, \varepsilon) > 0$. Với mỗi điểm tới hạn $x_i$ của $f$, tồn tại một phép biến đổi tọa độ $\varphi : \overline{\mathbf{B}}^n{}_\delta(x_i) \to \mathbb{R}^n \in C^r$ sao cho*

$$f \circ \varphi^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = y_1^2 + \cdots + y_l^2 - y_{l+1}^2 - \cdots - y_n^2 + const.$$

*và $\|\varphi\|_{C^{k-1}} \leq M(K, \varepsilon)$.*

*(v)* *Nếu $\|gradf(x)\| \leq \eta(K, \varepsilon)$ thì $x \in \overline{\mathbf{B}}^n{}_\delta(x_i)$, với $x_i$ là một điểm tới hạn của $f$.*

Chứng minh $(i)$ dựa trên gợi ý của Y. Yomdin (xem [Y-C]), các chứng minh $(ii), (iii), (iv)$ và $(v)$ dựa vào Định lý hàm ngược định lượng cho ánh xạ Lipschitz ở Chương 1 và Bổ đề Morse định lượng (Bổ đề 2.3.1).

*Chứng minh.*

$(i)$ Cho $0 < \varepsilon < K$. Áp dụng Định lý 2.4.2 cho $Df_0 : \overline{\mathbf{B}}^n \to \mathbb{R}^n$ và $0 < r \leq \varepsilon$, ta có

$$M(r, \Delta(Df_0, \gamma, \overline{\mathbf{B}}^n) \cap \mathbf{B}^n_\varepsilon) \leq cR_k(f_0)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{r^{\frac{n}{k}}} \sum_{i=0}^{n} \left( \frac{\gamma}{R_k(f_0)^{\frac{1}{k}} r^{\frac{k-1}{k}}} \right)^i .$$

Khi $r < 1$ và $\gamma < rR_k(f_0)^{\frac{1}{k}}$,

$$\begin{aligned} M(r, \Delta(Df_0, \gamma, \overline{\mathbf{B}^n}) \cap \mathbf{B}^n_\varepsilon) &\leq cR_k(f_0)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{r^{\frac{n}{k}}} \sum_{i=0}^{n} \left( \frac{\gamma}{rR_k(f_0)^{\frac{1}{k}}} \right)^i \\ &\leq cR_k(f_0)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{r^{\frac{n}{k}}} \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{rR_k(f_0)^{\frac{1}{k}}}}. \end{aligned}$$

Do vậy, độ đo Lebesgue của $\Delta(Df_0, \gamma, \overline{\mathbf{B}}^n) \cap \mathbf{B}^n_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Delta(Df_0, \gamma, \overline{\mathbf{B}}^n) \cap \mathbf{B}^n_\varepsilon) &\leq r^n \mathcal{L}(\overline{\mathbf{B}}^n) M(r, \Delta(Df_0, \gamma, \overline{\mathbf{B}}^n) \cap \mathbf{B}^n_\varepsilon) \\ &\leq r^n \mathcal{L}(\overline{\mathbf{B}}^n) cR_k(f_0)^{\frac{n}{k}} \frac{1}{r^{\frac{n}{k}}} \frac{1}{1 - \frac{\gamma}{rR_k(f_0)^{\frac{1}{k}}}}. \end{aligned}$$

Đặt

$$r(\varepsilon) = \frac{1}{2} \min(\varepsilon, (\frac{\varepsilon}{c^{\frac{1}{n}} R_k(f_0)^{\frac{1}{k}}})^{\frac{k}{k-1}})$$

và

$$\gamma(K, 2\varepsilon) = R_k(f_0)^{\frac{1}{k}} r(\varepsilon)(1 - \frac{r(\varepsilon)^n c R_k(f_0)^{\frac{n}{k}}}{\varepsilon^n r(\varepsilon)^{\frac{n}{k}}}) > 0,$$

với $R_k(f_0) = \frac{K}{(k-1)!}$. Ta nhận được

$$\mathcal{L}(\Delta(Df_0, \gamma, \overline{\mathbf{B}^n}) \cap \mathbf{B}^n_\varepsilon) < \varepsilon^n \mathcal{L}(\overline{\mathbf{B}^n}) = \mathcal{L}(\mathbf{B}^n_\varepsilon).$$

Như vậy

$$\Delta(Df_0, \gamma, \overline{\mathbf{B}^n}) \cap \mathbf{B}^n_\varepsilon \subsetneq \mathbf{B}^n_\varepsilon.$$

Vậy ta có thể chọn một giá trị $\gamma(K, 2\varepsilon)$-chính quy $v$ của $Df_0$, với $\|v\| \leq \varepsilon$, i.e. $v \in \mathbf{B}^n_\varepsilon$.

Xét ánh xạ $Df : \overline{\mathbf{B}}^n \to \mathbb{R}^n$. Khi đó $x$ là một điểm tới hạn của $f$ khi và chỉ khi $Df(x) = 0$. Vậy $f$ có kỳ dị không suy biến khi và chỉ khi $Df$ nhận $0 \in \mathbb{R}^n$ là giá trị chính quy, và khi đó $J(Df)$ chính là ma trận Hessian $Hf$.

Tiếp theo, cho $h : \overline{\mathbf{B}}^n \to \mathbb{R}$ là một hàm tuyến tính với $Dh = -v$ và $f = f_0 + h$. Khi đó $\|h\|_{C^k} \leq \varepsilon$. Ta có $0 \in \mathbb{R}^n$ là một giá trị $\gamma$-tới hạn của $Df$ nếu và chỉ nếu $-Dh$ là một giá trị $\gamma$-tới hạn của $Df_0$. Suy ra $0 \in \mathbb{R}^n$ là một giá trị $\gamma(K, 2\varepsilon)$-chính quy của $Df$ và ma trận Hessian $Hf$ là không suy biến tại mỗi điểm tới hạn của $f$. Gọi $x_i$ là các điểm thuộc $\overline{\mathbf{B}}^n$ sao cho

$$Df_0(x_i) = v, \text{ i.e. } x_i \in Df_0^{-1}(v).$$

Khi đó

$$Df(x_i) = Df_0(x_i) + Dh = 0.$$

Như vậy $x_i$ là các điểm tới hạn của $f$ đồng thời là các điểm $\gamma(K, 2\varepsilon)$-chính quy của $Df_0$ và $Df$. Do vậy

$$\|Hf(x_i)\| \geq \gamma(K, 2\varepsilon), \text{ với mọi điểm tới hạn } x_i \text{ của } f. \tag{2.1}$$

Gọi $\lambda_j$ là các giá trị riêng của $Hf(x_i)$, theo Chú ý 2.2.2-($ii$) ta nhận được

$$\min_j |\lambda_j| \geq \psi_1(K, 2\varepsilon) = \gamma(K, 2\varepsilon) > 0.$$

($ii$) Xét $Df : \overline{\mathbf{B}}^n \to \mathbb{R}^n$. Giả sử $x_i$ là một điểm tới hạn của $f$. Khi đó áp dụng (2.1) ta nhận được

$$\delta' = \frac{1}{2}\frac{1}{\|Hf(x_i)^{-1}\|} \geq \frac{1}{2}\gamma(K, 2\varepsilon).$$

Chọn

$$\delta' = \frac{1}{2}\gamma(K, 2\varepsilon).$$

Ta có

$$\|D(Df)(x) - D(Df)(x_i)\| = \|D(Df_0)(x) - D(Df_0)(x_i)\| \leq K\|x - x_i\|,$$

do đó nếu $\|x - x_i\| \leq \dfrac{\delta'}{K}$, ta nhận được

$$D(Df)(x) \in D(Df)(x_i) + \delta'\mathcal{B}.$$

Vậy với $r = \dfrac{\delta'}{K}$, thì với mọi $x \in \mathbf{B}^n_r(x_i)$ ta nhận được

$$D(Df)(x) \in D(Df)(x_i) + \delta'\mathcal{B}.$$

Do vậy, áp dụng Định lý 1.3.1, $Df$ khả nghịch trong quả cầu

$$\mathbf{B}^n_{\frac{r\delta'}{2K}}(x_i) = \mathbf{B}^n_{\frac{\gamma^2(K,2\varepsilon)}{8K^2}}(x_i).$$

Do đó $Df^{-1}(0)$ là 1 điểm trong quả cầu $\mathbf{B}^n_{\frac{\gamma^2(K,2\varepsilon)}{8K^2}}(x_i)$, nghĩa là $x_i$ là điểm tới hạn duy nhất của $f$ trong quả cầu $\mathbf{B}^n_{\frac{\gamma^2(K,2\varepsilon)}{8K^2}}(x_i)$.

Vậy nếu $x_i, x_j$ là các điểm tới hạn khác nhau của $f$, ta luôn có

$$d(x_i, x_j) \geq d(K, 2\varepsilon) = \frac{1}{4}\frac{\gamma^2(K, 2\varepsilon)}{K^2} > 0.$$

Do vậy số các điểm tới hạn của $f$ không vượt quá $N(K,2\varepsilon) = M\left(\frac{1}{4}\frac{\gamma^2(K,2\varepsilon)}{K^2}, \overline{\mathbf{B}}^n\right)$-số quả cầu bán kính $\dfrac{1}{4}\dfrac{\gamma^2(K,2\varepsilon)}{K^2}$ phủ tập $\overline{\mathbf{B}}^n$.

$(iii)$ Giả sử số các điểm tới hạn của $f$ là $N, N \leq N(K,2\varepsilon)$ và các giá trị tới hạn của $f$ được xếp thứ tự như sau:

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq \ldots \leq f(x_N).$$

Với mỗi điểm tới hạn $x_i$ của $f$ ta đặt

$$U_i = \mathbf{B}^n_{\frac{d(K,2\varepsilon)}{2}}(x_i) \cap \overline{\mathbf{B}}^n, \quad B_i = \mathbf{B}^n_{\frac{d(K,2\varepsilon)}{4}}(x_i) \cap \overline{\mathbf{B}}^n.$$

Gọi $\lambda_i : \overline{\mathbf{B}}^n \to [0,1]$ là ánh xạ lớp $C^\infty$, ở đây

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} 0, & x \notin U_i \\ 1, & x \in B_i \end{cases}$$

và có đạo hàm mọi cấp bị chặn trên bởi $C_1$.

Đặt $\widetilde{f} = f + \lambda$, với

$$\lambda : \overline{\mathbf{B}}^n \to \mathbb{R}, \quad \lambda(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \lambda_i(x), \text{ ở đây } c_i = i \cdot \frac{\varepsilon}{2C_1kN^2} > 0.$$

Khi đó do $(ii)$ các $U_i$ là rời nhau và ta có được $\|\lambda\|_{C^k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Do đó $\widetilde{f}$ là một hàm Morse có cùng các điểm tới hạn như $f$ và cũng với các chỉ số như các điểm tới hạn của $f$.

Hơn nữa $\widetilde{f}(x_i) = f(x_i) + c_i$. Do đó với $x_i, x_j$ là các điểm tới hạn của $f$, $i \neq j$, ta nhận được

$$|\widetilde{f}(x_i) - \widetilde{f}(x_j)| = |f(x_i) + c_i - f(x_j) - c_j| \geq \frac{\varepsilon}{2kC_1N^2} > 0. \tag{2.2}$$

Như vậy, nếu thay thế ánh xạ tuyến tính $h$ trong Chứng minh $(i)$ bởi

$$h = h_1 + \lambda,$$

với $h_1 : \overline{\mathbf{B}}^n \to \mathbb{R}$ là ánh xạ tuyến tính sao cho $Dh_1 = -v$, và $v$ là một giá trị $\gamma(K,\varepsilon)$-chính quy của $Df_0$ có khoảng cách đến $0 \in \mathbb{R}^n$ lớn nhất là $\frac{\varepsilon}{2}$, ta nhận được

$$\|h\|_{C^k} = \|h_1 + \lambda\|_{C^k} \leq \varepsilon,$$

và $f = f_0 + h = f_0 + h_1 + \lambda$ thỏa $(i)$ và $(ii)$, với

$$\psi_1(K,\varepsilon) = \gamma(K,\varepsilon);\ d(K,\varepsilon) = \frac{1}{4}\frac{\gamma^2(K,\varepsilon)}{K^2};\ N(K,\varepsilon) = M\left(\frac{1}{4}\frac{\gamma^2(K,\varepsilon)}{K^2}, \overline{\mathbf{B}}^n\right).$$

Hơn nữa, theo (2.2), với bất kỳ $i \neq j$, ta có

$$|f(x_i) - f(x_j)| \geq \psi_2(K,\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2kC_1N^2(K,\varepsilon)} > 0.$$

$(iv)$ Theo $(ii)$, ta chỉ cần chứng minh $(iv)$ cho mỗi điểm tới hạn $x_i$. Hơn nữa, có thể giả sử $x_i = 0, f(x_i) = 0$. Gọi $Q_0 \in Gl(n)$ là phép biến đổi tuyến tính sao cho

$${}^tQ_0 Hf(0) Q_0 = D_0.$$

Phép biến đổi tọa độ $\varphi$ được xây dựng như sau. Trước hết, đặt $B : \overline{\mathbf{B}}^n \to \mathrm{Sym}(n) \in C^{k-1}$, được định nghĩa bởi

$$B(x) = B_x = (b_{ij}(x))_{1\leq i,j\leq n},\ \text{ở đây } b_{ij}(x) = \int_0^1\int_0^1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(stx)dsdt, 1 \leq i,j \leq n.$$

Khi đó

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x)x_ix_j \quad \text{và} \quad B(0) = A = Hf(0).$$

Áp dụng Bổ đề 2.3.1 ta nhận được

$$\mathcal{P} : U(A) \to Gl(n),$$

là ánh xạ lớp $C^\omega$ sao cho $\mathcal{P}(A) = Q_0$, và nếu $\mathcal{P}(B) = Q$ thì ${}^tQBQ = D_0$.

Theo Định lý Giá trị trung bình và Nhận xét 2.3.2, điều kiện để áp dụng Bổ đề 2.3.1 là

$$\|Hf(x) - A\| \leq (K+\varepsilon)\|x\| \leq \frac{1}{2n\|Q_0\|^2} \leq \frac{1}{2n}\gamma(K,\varepsilon),$$

hoặc

$$\|x\| \leq \frac{1}{(K+\varepsilon)2n\|Q_0\|^2} \leq \frac{1}{(K+\varepsilon)2n}\gamma(K,\varepsilon).$$

Đặt $\delta = \psi_3(K,\varepsilon) = \frac{1}{(K+\varepsilon)2n}\gamma(K,\varepsilon)$ và

$$\varphi : U_\delta(0) \to \mathbb{R}^n, \quad y = \varphi(x) = Q_x^{-1}x, \quad \text{với } Q_x = \mathcal{P}(B_x).$$

Ta có

$$f(x) = {}^t x B_x x = {}^t y({}^t Q_x B_x Q_x) y = {}^t y D_0 y = y_1^2 + \cdots + y_l^2 - y_{l+1}^2 - \cdots - y_n^2.$$

Để chứng minh $\|\varphi\|_{C^{k-1}} \leq M(K, \varepsilon)$, ta biểu diễn $\varphi$ ở dạng phép hợp các ánh xạ sau

$$\varphi : x \in U_\delta(0) \xrightarrow{B} B_x \xrightarrow{\mathcal{P}} Q_x \xrightarrow{Inv} Q_x^{-1} \xrightarrow{L} \varphi(x) = Q_x^{-1} x.$$

Bởi phép xây dựng $B \in C^{k-1}$, và theo giả thiết, các đạo hàm riêng của $B$

$$\|\partial^\alpha B(x)\| \leq K, \text{for all } \alpha \in \mathbf{N}^n, |\alpha| \leq k-1.$$

Từ $U(A)$ là compact và theo Nhận xét 2.3.2, tồn tại $M_1(K, \varepsilon) > 0$ sao cho

$$\|\partial^\alpha \mathcal{P}(B)\| \leq M_1(K, \varepsilon), \text{ với mọi } B \in U(A), |\alpha| \leq k-1.$$

Tương tự, từ $P(U(A))$ là compact, tồn tại $C_2(K, \varepsilon) > 0$ sao cho

$$\|\partial^\alpha Inv(Q)\| \leq C_2(K, \varepsilon), |\alpha| \leq k-1, \text{ với mọi } Q \in \mathcal{P}(U(A)).$$

Đặt

$$\overline{L} : U_\delta \times Inv(\mathcal{P}(U(A))) \to \mathbb{R}^n, \overline{L}(x, Q') = Q'x.$$

Khi đó $\overline{L}$ là một dạng song tuyến tính. Do đó tồn tại $C_3(K, \varepsilon) > 0$ sao cho

$$\|\partial L\| \leq C_3(K, \varepsilon), \ \|\partial^\alpha L\| = 0, \text{ với } |\alpha| \geq 2, \text{ và } (x, Q') \in U_\delta \times Inv(\mathcal{P}(U(A))).$$

Từ $\partial^\alpha \varphi$ có thể được biểu diễn như là một tổng của các tích của $\partial^{\alpha_1} B, \partial^{\alpha_2} \mathcal{P}, \partial^{\alpha_3} Inv$ và $\partial^{\alpha_4} L$, với $|\alpha_j| \leq |\alpha|, j = 1, \ldots, 4$, tồn tại $M(K, \varepsilon) > 0$ phụ thuộc vào $K$, $M_1(K, \varepsilon)$, $C_2(K, \varepsilon)$ và $C_3(K, \varepsilon)$ sao cho $\|\varphi\|_{C^{k-1}} \leq M(K, \varepsilon)$.

$(v)$ Xét $Df : \overline{\mathbf{B}}^n \to \mathbb{R}^n$. Khi đó với $x_i$ là điểm tới hạn của $f$, ta có

$$Df(x_i) = 0, \|Df(x)\| = \|Df(x) - Df(x_i)\| \text{ với mọi } x \in \overline{\mathbf{B}}^n,$$

hơn nữa

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{1}{\|Hf(x_i)^{-1}\|} \geq \frac{1}{2} \gamma(K, \varepsilon).$$

Ta có

$$\|D(Df)(x) - D(Df)(x_i)\| \leq (K+\varepsilon)\|x - x_i\|,$$

do đó nếu $\|x - x_i\| \leq \frac{\sigma}{K+\varepsilon}$, với $\sigma = \frac{1}{2}\gamma(K, \varepsilon)$, ta nhận được

$$D(Df)(x) \in D(Df)(x_i) + \sigma\mathcal{B}.$$

Do vậy, nếu $r = \min(\frac{\sigma}{K+\varepsilon}, \frac{1}{\sigma n}\gamma(K, \varepsilon))$ thì

$$D(Df)(x) \in D(Df)(x_i) + \sigma\mathcal{B}, \text{ với mọi } \ x \in \mathbf{B}_r^n(x_i).$$

Do vậy, áp dụng Định lý 1.3.1, tồn tại các lận cận $U$ và $V$ của $x_i$ và $Df(x_i)$ tương ứng sao cho $Df$ khả nghịch, với

$$U = \mathbf{B}^n_{\frac{r\sigma}{2(K+\varepsilon)}}(x_i)\,, \quad V = \mathbf{B}^n_{\frac{r\sigma}{2}}(0)\,.$$

Vậy với $\eta(K, \varepsilon) = \dfrac{r\sigma}{2} = \dfrac{1}{4}r\gamma(K, \varepsilon)$, khi $\|\mathrm{grad} f(x)\| \leq \eta(K, \varepsilon)$ ta có

$$x \in \mathbf{B}^n_{\frac{r\sigma}{2(K+\varepsilon)}}(x_i) \subset \mathbf{B}^n_{\psi_3(K,\varepsilon)}(x_i)\,.$$

$\square$

**Kết luận của Chương 2**

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Bổ đề Morse định lượng (Bổ đề 2.3.1).
- Chứng minh chi tiết của Định lý Morse định lượng được phát biểu bởi Y. Yomdin 2005 (Định lý 2.5.1).

# Chương 3

# CHẶN TRÊN CHO CÁC SỐ BETTI CỦA TẬP NỬA ĐẠI SỐ

## 3.1 Giới thiệu

Trong chương này, các kết quả được nghiên cứu trên một trường thực đóng (ở các chương 1, 2 và 4, các kết quả nghiên cứu trên trường thực $\mathbb{R}$).

Cho $\mathbf{R}$ là một trường thực đóng (xem định nghĩa phần 3.2.1), $S \subset \mathbf{R}^k$ là tập nửa đại số. Một độ đo quan trọng của độ phức tạp topo của $S$ là các số Betti $b_i(S)$, đặc biệt $b_0(S)$ là số thành phần liên thông của $S$. Đến nay đã có nhiều kết quả nghiên cứu về các chặn trên khác nhau cho các số Betti của tập nửa đại số. Kết quả sớm nhất và điển hình trong lĩnh vực này đó là kết quả của Oleinik-Petrovskii, Thom, Milnor về đánh giá chặn trên cho tổng các số Betti của các tập đại số, và đó là một kết quả cơ sở cho một số đánh giá chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số. Đặt $b(k, d)$ là maximum của tổng các số Betti của một tập đại số được định nghĩa bởi các đa thức bậc $d$ trong $\mathbf{R}^k$. Khi đó

$$b(k, d) \leq d(2d-1)^{k-1}.$$

Chú ý rằng chặn trên cho tổng các số Betti của tập đại số nêu trên là chặt theo nghĩa độ phức tạp, ví dụ sau cho ta điều đó.

**Ví dụ 3.1.1.** Cho $S \subset \mathbf{R}^k$ là tập đại số được định nghĩa bởi $(x_1-1)(x_1-2)\cdots(x_1-$

$d) = \cdots = (x_k - 1)(x_k - 2)\cdots(x_k - d) = 0$. Khi đó $S$ gồm $d^k$ điểm cô lập. Do vậy chỉ có số Betti $b_0$ khác không và $b_0(S) = d^k$.

Với $S$ là tập nửa đại số cơ sở (là tập được định nghĩa bởi hội hoặc tuyển các bất phương trình đa thức), S. Basu (2003 - [Ba2]) đã đưa ra đánh giá chặn trên cho các số Betti $b_i(S)$, các chặn trên nhận được là các hàm mũ theo số biến $k$.
Với $S \subset \mathbf{R}^k$ là tập nửa đại số được định nghĩa bởi $S = \{x \in \mathbf{R}^k| \quad P_1(x) \geq 0, \ldots, P_m(x) \geq 0\}$, ở đây $P_j \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_k],\ \deg(P_j) \leq d, 1 \leq j \leq m$, và $S$ chứa trong tập đại số $Z(Q)$ có chiều $k'$, với $\deg(Q) \leq d$. Khi đó

$$b_i(S) \leq \sum_{j=0}^{k'-i} \binom{m}{j} 2^{j+1} d(2d-1)^{k-1}.$$

Trường hợp $S \subset \mathbf{R}^k$ là tập nửa đại số được định nghĩa bởi $S = \{x \in \mathbf{R}^k| \quad P_1(x) \geq 0 \vee \cdots \vee P_m(x) \geq 0\}$, với $P_j \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_k],\ \deg(P_j) \leq d, 1 \leq j \leq m$. Khi đó

$$b_i(S) \leq \sum_{j=0}^{i+1} \binom{m}{j} 3^j d(2d-1)^{k-1}.$$

Đối với trường hợp $S$ được định nghĩa bởi các đa thức bậc $\leq 2$, đã có một số đánh giá cho các chặn trên là các đa thức theo số biến $k$ và số đa thức $m$, hơn nữa cho kết quả chặt hơn các đánh giá nêu trên khi quy về bậc 2.

Đánh giá của S. Basu (2003 - [Ba2]) về trường hợp bậc 2, cho chặn trên là đa thức theo $k$ và $m$ nếu cố định $l$: Với $l > 0$, cho $S \subset \mathbf{R}^k$ được định nghĩa bởi $S = \{x \in \mathbf{R}^k| \quad P_1(x) \geq 0, \ldots, P_m(x) \geq 0\}$, ở đây, $P_i \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_k],\ \deg(P_i) \leq 2, 1 \leq i \leq m$. Khi đó

$$b_{k-l}(S) \leq \binom{s}{l} k^{O(l)}.$$

Gần đây, S. Basu và M. Kettner (2008 - [Ba-K]) đã đưa ra một chặn trên khác là đa thức theo $k$ và $m$, với ràng buộc số đa thức không lớn hơn số biến. Kết quả dựa trên việc đánh giá các số Betti của đa tạp xạ ảnh phức là giao đầy đủ không suy biến, được định nghĩa bởi các dạng toàn phương (1991 - [B-L-R]): Cho $S \subset \mathbf{R}^k$

là tập nửa đại số được định nghĩa bởi $S = \{x \in \mathbf{R}^k | \ \ P_1(x) \geq 0, \ldots, P_m(x) \geq 0\}$, với $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\} \subset \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_k]$, $\deg(P_j) \leq 2, m \leq k$. Khi đó, với mọi $0 \leq i \leq k-1$,

$$b_i(S) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\min\{m,k-i\}} 2^j \binom{m}{j} \binom{k+1}{j}.$$

Trong chương này, chúng tôi quan tâm đến việc đánh giá chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số cơ sở. Cụ thể, chúng tôi chứng minh các kết quả sau:

Cho tập nửa đại số cơ sở $S = \{x \in \mathbf{R}^k : P_1 \geq 0, \ldots, P_m \geq 0\} \subset \mathbf{R}^k$, với $P_j \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_k]$ và $\deg(P_j) \leq d, 1 \leq j \leq m$. Khi đó với mọi $0 \leq i \leq k-1$,

$$b_i(S) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\min\{m,k-i\}} \binom{m}{j} d(2d-1)^k.$$

Tổng các số Betti của $S$,

$$b(S) \leq \frac{1}{2} k \sum_{j=1}^{\min\{m,k\}} \binom{m}{j} d(2d-1)^k.$$

Phần còn lại của Chương được trình bày như sau. Trong Phần 2, chúng tôi giới thiệu các khái niệm và kết quả cần thiết phục vụ chứng minh kết quả chính. Trong Phần 3 chúng tôi đưa ra đánh giá chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số cơ sở (khác với kết quả của S. Basu [Ba2], $S \subset \mathbf{R}^k$ được định nghĩa bởi các đa thức bậc $\leq d$ và chứa trong tập đại số có chiều $k'$).

## 3.2 Các khái niệm và một số kết quả

Cho $P \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_k]$ là đa thức bậc $d$. Khi đó

$$P^h(X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}) = X_{k+1}^d P(\frac{X_1}{X_{k+1}}, \ldots, \frac{X_k}{X_{k+1}}),$$

gọi là đa thức thuần nhất hóa của $P$.

Cho $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\} \subset \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_k]$ và $S \subset \mathbf{R}^k$. Ta định nghĩa

$$Z(\mathcal{P}, S) = \{x \in S : P_1(x) = \ldots = P_m(x) = 0\},$$

và

$$\mathcal{P}_J = \{P_j : \quad j \in J\}, \quad J \subset \{1, \ldots, m\}.$$

### 3.2.1 Trường thực đóng

Một trường $\mathbf{C}$ là đại số đóng nếu mọi đa thức khác hằng số $P(X)$ với hệ số trong $\mathbf{C}$ đều có nghiệm trong $\mathbf{C}$.

Một trường thực đóng $\mathbf{R}$ là một trường thứ tự mà nón dương là tập con của $\mathbf{R}$ và sao cho mọi đa thức trong $\mathbf{R}[X]$ có bậc lẻ luôn có nghiệm trong $\mathbf{R}$.

Cho $\mathbf{R}$ là một trường thực đóng và $\varepsilon \in \mathbf{R}$ là một vô cùng bé. Ký hiệu $\mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle$ là trường thực đóng của các chuỗi đại số Puiseux với hệ số trong $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle = \{\sum_{i \geq k} a_i \varepsilon^{i/q} : \quad k \in \mathbb{Z}, i \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbf{R}\}.$$

Dấu của một chuỗi Puiseux trong $\mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle$ là dấu của hệ số có bậc thấp nhất.

### 3.2.2 Tập nửa đại số

Lớp các tập nửa đại số được định nghĩa bởi các phương trình, bất phương trình đa thức và có một số tính chất đặc biệt: ổn định qua phép chiếu (định lý Tarski-Seidenberg), có hữu hạn thành phần liên thông (định lý Łojasiewicz).

**Định nghĩa 3.2.1.** Lớp các **tập nửa đại số** trong $\mathbf{R}^n$ là lớp bé nhất các tập con trong $\mathbf{R}^n$ thỏa:
$(i)$ Chứa mọi tập dạng $\{x \in \mathbf{R}^n | \ P(x) > 0\}$ , $P \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$.
$(ii)$ Đóng với phép hợp hữu hạn, giao hữu hạn và lấy phần bù.

Cho $X \subset \mathbf{R}^n$, $f : X \longrightarrow \mathbf{R}^m$ được gọi là **nửa đại số** nếu đồ thị của $f$ là nửa đại số.

**Ví dụ 3.2.2.**

1. Mọi tập đại số thực là nửa đại số. Do trên trường số thực $P_1 = \cdots = P_k = 0 \ \Leftrightarrow$

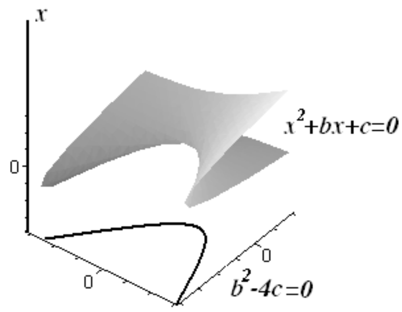
$P_1^2 + \cdots + P_k^2 = 0$, nên mọi tập đại số trong $\mathbb{R}^n$ đều có dạng $\{x \in \mathbb{R}^n | \ P(x) = 0\}$, với $P$ là đa thức.

2. Tập nửa đại số trong $\mathbb{R}$ là hợp hữu hạn điểm và khoảng mở.

3. Một ánh xạ đa thức là nửa đại số.

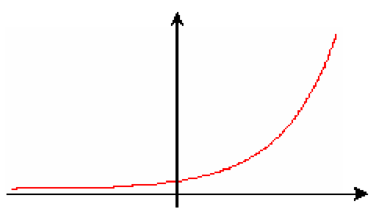
4. Hàm $f : \{(b,c)| \ b^2 - 4c > 0\} \to \mathbb{R}, \ f(b,c) = \dfrac{1}{2}(-b + \sqrt{b^2 - 4c})$ là hàm nửa đại số vì đồ thị: $\Gamma(f) = \{(x,b,c)| \ x^2 + bx + c = 0, b^2 - 4c > 0, x > -\dfrac{b}{2}\}$ là nửa đại số.

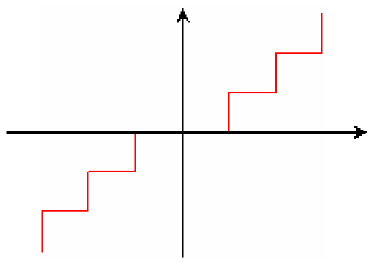
5. Cho đa thức $f(b,c,x) = x^2 + bx + c$. Tập các giá trị $(b,c)$ sao cho $f$ có nghiệm thực chính là hình chiếu của tập $\{(x,b,c)| \ f(b,c,x) = 0\}$ lên mặt phẳng $(b,c)$. Nó là tập nửa đại số $\{(b,c)| \ b^2 - 4c \geq 0\}$.




Hình 3.1: Chiếu của tập nửa đại số từ $\mathbb{R}^3$ đến $\mathbb{R}^2$.

6. Các tập sau không nửa đại số:





Hình 3.2: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ y = e^x\}$ $\qquad$ $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \ y = [x]\}$

Cho $A \subset \mathbf{R}^n$ là tập nửa đại số, $A = \cup_{i=1}^p A_i$, với $A_i = \cap_{j=1}^{j_i} A_{ij}$ và $A_{ij}$ có dạng:

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n : p_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \ ? \ 0\},$$

$p_{ij}$ là các đa thức bậc $d_{ij}$, $? \in \{>, \geq\}$.

**Định nghĩa 3.2.3.** Tập hợp các dữ liệu: $(n, p, j_1, \ldots, j_p, (d_{ij})_{i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,j_i})$ được gọi là **lược đồ** của tập $A$, ký hiệu $D(A)$.

Cho lược đồ $D = (n, p, j_1, \ldots, j_p, (d_{ij})_{i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,j_i})$, ta định nghĩa

$$B_0(D) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} d_i(d_i-1)^{n-1}, \quad \text{với } d_i = \sum_{j=1}^{j_i} d_{ij}.$$

Cho $A$ là một tập nửa đại số, ta định nghĩa

$$\widehat{B}_0(A) = \inf\{B_0(D) : D \text{ là diagram của tập } \ A\}.$$

Định lý 3.2.4 sau đây được Tarski (1931) phát biểu và chứng minh dưới dạng logic. Sau đó Seidenberg (1954) dùng phương pháp dãy Sturm để chứng minh. Đây là một tính chất đặc biệt của lớp các tập nửa đại số.

**Định lý 3.2.4** (Tarski-Seidenberg)**.** *Cho $S \subset \mathbf{R}^{n+m}$ là tập nửa đại số, $\pi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n, (x, y) \mapsto x$. Khi đó $\pi(S)$ là tập nửa đại số.*

**Định lý 3.2.5** (Łojasiewicz)**.** *Số thành phần liên thông của tập nửa đại số là hữu hạn và mỗi thành phần liên thông đó cũng là tập nửa đại số.*

*Chứng minh.* Xem [L]. □

**Định lý 3.2.6** (Tam giác phân)**.** *Cho $S \subset \mathbf{R}^k$ là một tập nửa đại số đóng và bị chặn, và $S_1, \ldots, S_q$ là các tập con nửa đại số của $S$. Khi đó tồn tại một phức đơn hình $K$ trong $\mathbf{R}^k$ và một đồng phôi nửa đại số $h : |K| \to S$ sao cho mỗi $S_j$ là hợp của các ảnh qua $h$ của một số đơn hình mở của $|K|$. Hơn nữa, các đỉnh của $K$ có thể chọn với các tọa độ hữu tỷ.*

*Chứng minh.* Xem [Ba-P-R, Ch.4 Theorem 5.41]. □

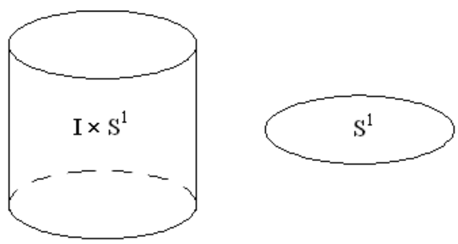
### 3.2.3 Tương đương đồng luân nửa đại số

**Định nghĩa 3.2.7.** Hai ánh xạ nửa đại số liên tục $f, g : X \to Y$ được gọi là **đồng luân nửa đại số**, ký hiệu $f \sim_{sa} g$ nếu tồn tại một ánh xạ nửa đại số liên tục $F : X \times [0,1] \to Y$ sao cho $F(x, 0) = f(x)$ và $F(x, 1) = g(x)$ với mọi $x \in X$. Khi đó với mỗi $t \in [0,1]$, ánh xạ $f_t : X \to Y, f_t(x) = F(x,t)$ là liên tục và tính liên tục của chúng phụ thuộc vào $t$. Khi đó $F$ được gọi là **ánh xạ đồng luân nửa đại số** giữa $f$ và $g$.

Hai tập $X, Y$ là **tương đương đồng luân nửa đại số** nếu tồn tại các ánh xạ nửa đại số liên tục $f : X \to Y,\ g : Y \to X$, sao cho $g \circ f \sim_{sa} Id_X,\ \ f \circ g \sim_{sa} Id_Y$.

**Định nghĩa 3.2.8.** Cho tập nửa đại số $S \subset \mathbf{R}^k$, **mở rộng của** $S$ vào $\mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle^k$, ký hiệu $\mathrm{Ext}(S, \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle^k)$, là tập nửa đại số chứa trong $\mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle^k$ được định nghĩa cũng bởi các phương trình và bất phương trình định nghĩa $S$.

**Ví dụ 3.2.9.** Tương đương đồng luân nửa đại số giữa trụ $I \times S^1$ và $S^1$.




Hình 3.3: Tương đương đồng luân.

**Tính chất 3.2.10** ([Ba-P-R])**.** *Cho $S, T$ là hai tập nửa đại số đóng và bị chặn của $\mathbf{R}^k$, $\mathbf{R}'$ là một trường mở rộng đóng thực của $\mathbf{R}$. Khi đó $S$ và $T$ là tương đương đồng luân nửa đại số nếu và chỉ nếu $Ext(S, \mathbf{R}')$ và $Ext(T, \mathbf{R}')$ là tương đương đồng luân nửa đại số.*

**Định nghĩa 3.2.11.** Một **phép co rút biến dạng nửa đại số** của không gian $X$ vào không gian con $A \subset X$ là một họ các ánh xạ liên tục nửa đại số $f : X \times [0,1] \to$

$X, (x,t) \mapsto f(x,t)$, sao cho $f_0 = Id,\ f_1(X) = A$ và $f|_A = Id$, với mọi $t$. Khi đó ánh xạ liên kết $X \times [0,1] \to X, (x,t) \mapsto f_t(x)$ cũng liên tục.

**Mệnh đề 3.2.12** (Cấu trúc nón tại vô hạn)**.** *Cho $S$ là một tập nửa đại số đóng con của $\mathbf{R}^n$. Khi đó tồn tại $r \in \mathbf{R},\ r > 0$, sao cho với mọi $r' > r$, tồn tại một phép co rút biến dạng nửa đại số từ $S$ tới $S_{r'} = S \cap \overline{\mathbf{B}}_n(0, r')$ và một phép co rút biến dạng nửa đại số từ $S_{r'}$ tới $S_r$.*

*Chứng minh.* Xem [Ba-P-R, Ch.5 Proposition 5.50]. □

**Mệnh đề 3.2.13.** *Cho $\mathbf{R}$ là một trường thực đóng. Cho $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ là hai tập nửa đại số đóng và bị chặn, tương đương đồng luân nửa đại số. Khi đó*

$$H_*(X) \cong H_*(Y),$$

*ở đây $H_*(X)$ là các nhóm đồng điều đơn hình của $X$.*

*Chứng minh.* Xem [Ba-P-R, Ch.6 Proposition 6.36]. □

**Định lý 3.2.14.** *Nếu $X$ là một không gian và $D$ là một co rút biến dạng của $X$, thì $D$ và $X$ là tương đương đồng luân.*

*Chứng minh.* Xem [C, Ch.6. Theorem 6.12]. □

### 3.2.4 Tầm thường hóa nửa đại số

**Định nghĩa 3.2.15.** Cho ánh xạ nửa đại số $f : S \to A$, $A \subseteq \mathbf{R}^m$ và $S \subseteq \mathbf{R}^n$ là các tập nửa đại số. Một phép tầm thường hóa nửa đại số của $f$ là một bộ $(F, \lambda)$ gồm tập nửa đại số $F$ và ánh xạ nửa đại số $\lambda : S \to F$, sao cho

$$(f, \lambda) : S \to f(S) \times F$$

là một phép đồng phôi.

**Chú ý 3.2.16.** $f^{-1}(y)$ đồng phôi với $F$, với mọi $y \in f(S)$.

**Định lý 3.2.17** (Tầm thường hóa nửa đại số)**.** *Cho $f : S \to A$ là một ánh xạ nửa đại số liên tục. Khi đó tồn tại một phân hoạch hữu hạn $A = A_1 \cup \ldots \cup A_M$ của không gian $A$ thành các $A_i$ sao cho $f$ là tầm thường nửa đại số trên mỗi $A_i$.*

*Chứng minh.* Xem [D1, Ch. 9, Theorem 1.2]; hoặc [Ba-P-R, Ch.5 Th.5.46]. □

### 3.2.5 Số Betti của tập nửa đại số

Cho $K$ là một phức đơn hình hữu hạn, ký hiệu $H_p(K)$ là nhóm đồng điều đơn hình thứ $p$ và $H^p(K)$ là nhóm đối đồng điều đơn hình thứ $p$ của $K$. Khi đó số chiều của $H_p(K)$ là hữu hạn và được gọi là số Betti thứ $p$ của $K$, ký hiệu $b_p(K)$. Đặt $b(K) = \sum_{p\geq 0} b_p(K)$ là tổng các số Betti của $K$.

Cho $S \subset \mathbf{R}^k$ là tập nửa đại số đóng. Theo Mệnh đề 3.2.12 về cấu trúc nón tại vô hạn, tồn tại $r \in \mathbf{R}, r > 0$, sao cho $\forall r' \geq r$, tồn tại một phép co rút biến dạng nửa đại số từ $S$ vào $S_{r'} = S \cap \overline{\mathbf{B}}^k_{r'}(0)$ và một phép co rút biến dạng nửa đại số từ $S_r$ vào $S_{r'}$. Như vậy $S_r$ và $S_{r'}$ là tương đương đồng luân, nên $H_p(S_r) \cong H_p(S_{r'})$; hơn nữa $S_r$ là đóng và bị chặn. Theo Định lý tam giác phân (Định lý 3.2.6), $S_r$ có thể được tam giác phân bởi phức đơn hình hữu hạn $K$ với tọa độ hữu tỷ, $f : |K| \to S_r$. Khi đó $H_p(S) \cong H_p(S_r) \cong H_p(K)$, với $p \geq 0$. Vậy số chiều của $H_p(S)$ bằng số chiều của $H_p(K)$. Hơn nữa, số chiều của $H_p(K)$ không phụ thuộc cách chọn phép tam giác phân, nên ta có định nghĩa sau.

**Định nghĩa 3.2.18.** Số chiều của $H_p(S)$ được gọi là số Betti thứ $p$ của $S$, ký hiệu $b_p(S)$. Ký hiệu $b(S) := \sum_{p\geq 0} b_p(S)$ là tổng các số Betti của $S$.

Chú ý rằng các nhóm đồng điều của một tập nửa đại số $S \subset \mathbf{R}^k$ là hữu hạn sinh; do vậy các số Betti $b_p(S)$ là hữu hạn.

**Mệnh đề 3.2.19** ([Ba-P-R])**.** *Số thành phần liên thông của một tập nửa đại số đóng và bị chặn là $b_0(S)$.*

### 3.2.6 Một số kết quả về topo đại số

**Định lý 3.2.20** (Đối ngẫu Alexander)**.** *Cho $r > 0$, $A$ là tập con đóng của $\mathbf{S}_r^k$. Khi đó*

$$\widetilde{H}_i(\mathbf{S}_r^k(0) \setminus A) \cong \widetilde{H}^{k-i-1}(A), 0 \leq i \leq k-1,$$

*ở đây, $\widetilde{H}_i(A)$ và $\widetilde{H}^i(A)$, là nhóm đồng điều và đối đồng điều rút gọn tương ứng.*

*Chứng minh.* Xem [V, p. 126]. □

**Hệ quả 3.2.21.**

$$b_i(\mathbf{S}_r^k(0) \setminus A) = b_{k-i-1}(A).$$

*Chứng minh.* Số chiều của $\widetilde{H}_i(A)$ gọi là số Betti rút gọn thứ $i$ của $A$, ký hiệu $\widetilde{b}_i(A)$. Khi đó với $A \neq \emptyset$, $\widetilde{b}_i(A) = b_i(A), i \geq 1$ và $\widetilde{b}_0(A) = b_0(A) - 1$ (xem [V, p. 86]). Mặt khác, theo Định lý hệ số phổ dụng cho đối đồng điều (xem [Hat, Ch.3 Theorem 3.2]) $H_i(A) \cong H^i(A), i \geq 0$. Từ đó áp dụng Định lý 3.2.20 (Đối ngẫu Alexander) ta nhận được điều cần chứng minh. □

**Định lý 3.2.22.** *Cho $K$ là một phức đơn hình hữu hạn và $K_1, \ldots, K_n$ là các phức con của $K$ sao cho $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$. Khi đó với mọi $i \geq 0$,*

$$b_i(K) \leq \sum_{j=1}^{i+1} \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}, \#J=j} b_{i-j+1}(K_J).$$

*Chứng minh.* Xem [Ba2, Lemma 2]. □

**Hệ quả 3.2.23.** *Cho $S_1, \ldots, S_n$ là các tập con nửa đại số đóng của $\mathbf{R}^k$. Khi đó với mỗi $i \geq 0$ ta có,*

$$b_i\left(\bigcup_{1\leq j\leq n} S_j\right) \leq \sum_{j=1}^{i+1} \sum_{J \subset \{1,\ldots,n\}, \#J=j} b_{i-j+1}(S_J).$$

*Chứng minh.* Gọi phức đơn hình $K_i$, là phép tam giác phân của tập $S_i, i = 1, \ldots, n$. Khi đó $K = K_1 \cup \ldots \cup K_n$ là phép tam giác phân cho $S = S_1 \cup \ldots \cup S_n$. Từ đó, áp dụng Định lý 3.2.22 ta nhận được điều cần chứng minh. □

## 3.3 Chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số cơ sở

Áp dụng kỹ thuật chứng minh của Basu và Kettner về đánh giá chặn trên của các số Betti cho trường hợp bậc 2 (xem [Ba-K]), chúng tôi đưa ra đánh giá chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số cơ sở $S$ được định nghĩa bởi các đa thức bậc $\leq d$ . Cụ thể, chúng tôi chứng minh định lý sau:

**Định lý 3.3.1.** *Cho* $\mathcal{P} = \{P_1, \ldots, P_m\} \subset \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_k]$. *Cho* $S \subset \mathbf{R}^k$ *là tập nửa đại số được định nghĩa bởi*

$$S = \{x \in \mathbf{R}^k | \quad P_1(x) \geq 0, \ldots, P_m(x) \geq 0\},$$

*với* $\deg(P_j) \leq d$. *Khi đó*

$$b_i(S) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \binom{m}{j} d(2d-1)^k, 0 \leq i \leq k-1,$$

*với* $l = \min\{m, k-i\}$.

Từ Định lý 3.3.1 ta nhận được hệ quả sau:

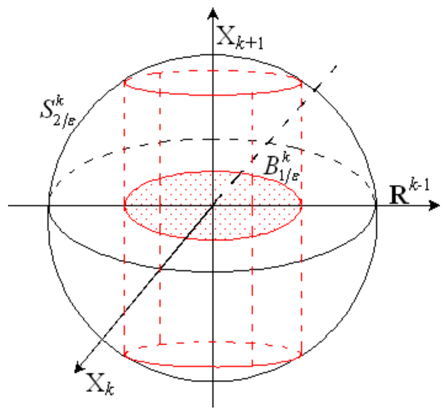
**Hệ quả 3.3.2.** *Với các giả thiết của Định lý 3.3.1 ta có*

$$b(S) \leq \frac{1}{2} k \sum_{j=1}^{\min(m,k)} \binom{m}{j} d(2d-1)^k.$$

**Phương pháp chứng minh.** Trước hết, áp dụng phép co rút biến dạng đưa việc đánh giá các số Betti $b_i(S)$ về việc đánh giá các số Betti $b_i(S \cap \mathbf{B}^k_{1/\varepsilon})$. Dùng kỹ thuật thuần nhất hóa đa thức đưa đến việc đánh giá các số Betti của tập con của mặt cầu $\mathbf{S}^k_{2/\varepsilon}$. Từ đó áp dụng định lý đối ngẫu Alexander, định lý Oleinik-Petrovskii, Thom, Milnor và kết quả của Basu về đánh giá số Betti của phức đơn hình.

Giả sử $1 \gg \varepsilon > 0$ là một vô cùng bé. Đặt

$$P_{m+1} = \frac{1}{\varepsilon^2} - \sum_{i=1}^{k} X_i^2.$$




Hình 3.4: Trụ $\mathbf{B}^k_{1/\varepsilon} \times \mathbf{R}$ giao với mặt cầu $\mathbf{S}^k_{2/\varepsilon}$.

Giao của trụ $\mathbf{B}^k_{1/\varepsilon} \times \mathbf{R}$ với mặt cầu $\mathbf{S}^k_{2/\varepsilon}$ (xem Hình 3.4) gồm hai phần rời nhau, mỗi phần đồng phôi với $\mathbf{B}^k_{1/\varepsilon}$, hơn nữa mỗi phần đều không giao với đường xích đạo của mặt cầu $\mathbf{S}^k_{2/\varepsilon}$ , nghĩa là tập $\mathbf{S}^k_{2/\varepsilon} \cap Z(X_{k+1}, \mathbf{R}^{k+1})$. Đặt

$$S_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle^k | \ \ P_1(x) \geq 0, \ldots, P_m(x) \geq 0, P_{m+1}(x) \geq 0\} = \mathrm{Ext}(S \cap \mathbf{B}^k_{1/\varepsilon}, \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle),$$

$$S^h_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle^k : P^h_1(x) \geq 0, \ldots, P^h_m(x) \geq 0\} \cap C_\varepsilon,$$

với

$$C_\varepsilon = \mathrm{Ext}((\mathbf{B}^k_{1/\varepsilon} \times \mathbf{R}) \cap \mathbf{S}^k_{2/\varepsilon}, \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle).$$

**Mệnh đề 3.3.3.** *$S_\varepsilon$ bị chặn, $H_i(S_\varepsilon) \cong H_i(S)$, với mọi $i \geq 0$.*

*Chứng minh.* Theo Mệnh đề 3.2.12 về cấu trúc nón tại vô hạn, $S_\varepsilon$ là một co rút biến dạng của $\mathrm{Ext}(S, \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle)$. Áp dụng Định lý 3.2.14 về tương đương đồng luân qua phép co rút biến dạng, ta nhận được $S_\varepsilon$ và $\mathrm{Ext}(S, \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle)$ có cùng kiểu đồng luân. Hơn nữa, có thể mở rộng một phép tam giác phân trên $\mathbf{R}$ thành một phép tam giác phân trên $\mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle$ và áp dụng Mệnh đề 3.2.13 về tương đương đồng luân nửa đại số, ta nhận được kết quả của mệnh đề. □

**Bổ đề 3.3.4.** *Ta có*

$$b_i(S_\varepsilon) = \frac{1}{2} b_i(S^h_\varepsilon), \ \ \textit{với mọi } 0 \leq i \leq k.$$

*Chứng minh.* Trước hết ta thấy rằng $S_\varepsilon$ bị chặn và $S_\varepsilon^h$ là chiếu từ gốc của tập $S_\varepsilon \times \{1\} \subset \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle^k \times \{1\}$ vào mặt cầu $\mathbf{S}^k_{2/\varepsilon}$ trong $\mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle^{k+1}$. Do $S_\varepsilon$ bị chặn nên phép chiếu không giao với đường xích đạo và có hai ảnh rời nhau nằm ở phần trên và phần dưới của nửa mặt cầu, do vậy

$$b_i(S_\varepsilon) = \frac{1}{2} b_i(S_\varepsilon^h).$$

□

Cho $H \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_{k+1}]$ là dạng toàn phương xác định dương, với $1 \gg \varepsilon > \delta > 0$, ta đặt $\widetilde{P}_i = (1-\delta)P_i^h + \delta H, 1 \le i \le m$.

Đặt

$$T_{\varepsilon,\delta} = \{x \in C_\varepsilon : \widetilde{P}_1(x) > 0, \ldots, \widetilde{P}_m(x) > 0\},$$

$$\overline{T}_{\varepsilon,\delta} = \{x \in C_\varepsilon : \widetilde{P}_1(x) \ge 0, \ldots, \widetilde{P}_m(x) \ge 0\}.$$

**Bổ đề 3.3.5.** *Với mọi $\varepsilon > \delta > 0$ đủ nhỏ ta có*

*(i)* $H_*(S_\varepsilon^h) \cong H_*(\overline{T}_{\varepsilon,\delta})$,

*(ii)* $H_*(T_{\varepsilon,\delta}) \cong H_*(\overline{T}_{\varepsilon,\delta})$.

*Chứng minh.*
*(i)* $S_\varepsilon^h$ và $\overline{T}_{\varepsilon,\delta}$ có cùng kiểu đồng luân và áp dụng Mệnh đề 3.2.13 về tương đương đồng luân nửa đại số.

*(ii)* Ta có thể chọn $\delta > \delta' > 0$ và nhận được một phép co rút biến dạng từ $T_{\varepsilon,\delta}$ vào $\overline{T}_{\varepsilon,\delta'}$, khi đó $\overline{T}_{\varepsilon,\delta'}$ cũng là một co rút biến dạng của $\overline{T}_{\varepsilon,\delta}$. Áp dụng Định lý 3.2.14 về tương đương đồng luân qua phép co rút biến dạng, ta nhận được $T_{\varepsilon,\delta}$ và $\overline{T}_{\varepsilon,\delta'}$ có cùng kiểu đồng luân, $\overline{T}_{\varepsilon,\delta'}$ và $\overline{T}_{\varepsilon,\delta}$ có cùng kiểu đồng luân. Do vậy

$$H_*(T_{\varepsilon,\delta}) \cong H_*(\overline{T}_{\varepsilon,\delta'}) \text{ và } H_*(\overline{T}_{\varepsilon,\delta'}) \cong H_*(\overline{T}_{\varepsilon,\delta}).$$

□

**Mệnh đề 3.3.6.** *Ta có*

$$b_i(T_{\varepsilon,\delta}) \leq \sum_{j=1}^{\min\{k-i,m\}} \binom{m}{j} d(2d-1)^k, i = 0, \ldots, k-1.$$

*Chứng minh.* Trước hết, ta thấy rằng $T_{\varepsilon,\delta}$ là một tập con mở và không liên thông với phần bù của nó trong

$$\mathrm{Ext}(\mathbf{S}^k_{2/\varepsilon}, \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle) \setminus \bigcup_{j=1}^{m} Z(\widetilde{P}^h_j, C_\varepsilon).$$

Do đó

$$b_i(T_{\varepsilon,\delta}) \leq b_i\left(\mathrm{Ext}(\mathbf{S}^k_{2/\varepsilon}, \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle) \setminus \bigcup_{j=1}^{m} Z(\widetilde{P}^h_j, C_\varepsilon)\right).$$

Theo Hệ quả 3.2.21,

$$b_i\left(\mathrm{Ext}(\mathbf{S}^k_{2/\varepsilon}, \mathbf{R}\langle\varepsilon\rangle) \setminus \bigcup_{j=1}^{m} Z(\widetilde{P}^h_j, C_\varepsilon)\right) = b_{k-1-i}\left(\bigcup_{j=1}^{m} Z(\widetilde{P}^h_j, C_\varepsilon)\right).$$

Từ đó, áp dụng Hệ quả 3.2.23 và Định lý Oleinik-Petrovskii, Thom, Milnor ta nhận được

$$\begin{aligned} b_i(T_{\varepsilon,\delta}) &\leq \sum_{j=1}^{k-i} \sum_{J\subset\{1,\ldots,m\},\#J=j} b_{k-i-j}\left(Z(\widetilde{P}^h_J, C_\varepsilon)\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\min\{k-i,m\}} \binom{m}{j} d(2d-1)^k. \end{aligned}$$

□

*Chứng minh Định lý 3.3.1.*

Theo Mệnh đề 3.3.3 các nhóm đồng điều của $S$ và $S_\varepsilon$ đẳng cấu.

Áp dụng Bổ đề 3.3.4,

$$b_i(S) = \frac{1}{2} b_i(S^h_\varepsilon), 0 \leq i \leq k-1.$$

Áp dụng Bổ đề 3.3.5,

$$b_i(S^h_\varepsilon) = b_i(T_{\varepsilon,\delta}).$$

Theo Mệnh đề 3.3.6 ta được

$$b_i(S) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \binom{m}{j} d(2d-1)^k,$$

với $l = \min\{m, k-i\}$. □

*Chứng minh Hệ quả 3.3.2.* Theo Định lý 3.3.1,

$$b_i(S) \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\min\{m,k\}} \binom{m}{j} d(2d-1)^k.$$

Do đó

$$b(S) \leq \frac{1}{2} k \sum_{j=1}^{\min\{m,k\}} \binom{m}{j} d(2d-1)^k.$$

□

**Nhận xét 3.3.7.** Khó có thể so sánh đánh giá nào chặt hơn giữa chặn trên của Định lý 3.3.1 và chặn trên của S. Basu [Ba2, Theorem 3] (xem Ví dụ 3.3.8).

**Ví dụ 3.3.8.** So sánh đánh giá chặn trên cho các số Betti $b_i(S)$ trong Định lý 3.3.1 ($S$ được định nghĩa bởi các đa thức bậc $\leq d$) và kết quả của S. Basu [Ba2, Theorem 3] ($S$ được định nghĩa bởi các đa thức bậc $\leq d$ chứa trong tập đại số có chiều $k'$) trong một số trường hợp.

a) So sánh theo điều kiện của Định lý 3.3.1

| | | | $b_0$ | | $b_1$ | | $b_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $k$ | $d$ | S. Basu | Luận án | S. Basu | Luận án | S. Basu | Luận án |
| 2 | 3 | 2 | 324 | 81 | 324 | 81 | 180 | 54 |
| 4 | 3 | 2 | 2340 | 378 | 1188 | 270 | 324 | 108 |
| 4 | 3 | 3 | 9750 | 2625 | 4950 | 1875 | 1350 | 750 |
| 4 | 9 | 3 | 189843750 | 87890625/2 | 189843750 | 87890625/2 | 189843750 | 87890625/2 |
| 5 | 9 | 4 | 11206773144 | 2501923634 | 11206773144 | 2501923634 | 11206773144 | 2501923634 |

b) So sánh theo điều kiện của [Ba2, Theorem 3]

| | | | | $b_0$ | | $b_1$ | | $b_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $k$ | $k'$ | $d$ | S. Basu | Luận án | S. Basu | Luận án | S. Basu | Luận án |
| 2 | 3 | 2 | 2 | 324 | 378 | 180 | 270 | 36 | 108 |
| 4 | 3 | 2 | 2 | 1188 | 1107 | 324 | 567 | 36 | 162 |
| 4 | 3 | 3 | 3 | 9750 | 15375/2 | 4950 | 7875/2 | 1350 | 1125 |
| 4 | 9 | 8 | 3 | 189843750 | 369140625/2 | 189843750 | 369140625/2 | 189843750 | 369140625/2 |
| 5 | 9 | 7 | 4 | 11206773144 | 10249816178 | 11206773144 | 10249816178 | 11206773144 | 10249816178 |

**Kết luận của Chương 3**

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Đánh giá chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số cơ sở (Định lý 3.3.1).

- Chặn trên cho tổng các số Betti của tập nửa đại số cơ sở (Hệ quả 3.3.2).

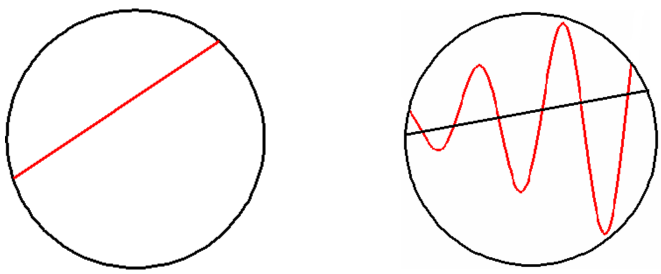
# Chương 4

# CHẶN TRÊN CHO ĐỘ ĐO HAUSDORFF CỦA CÁC TẬP THUẦN

## 4.1 Giới thiệu

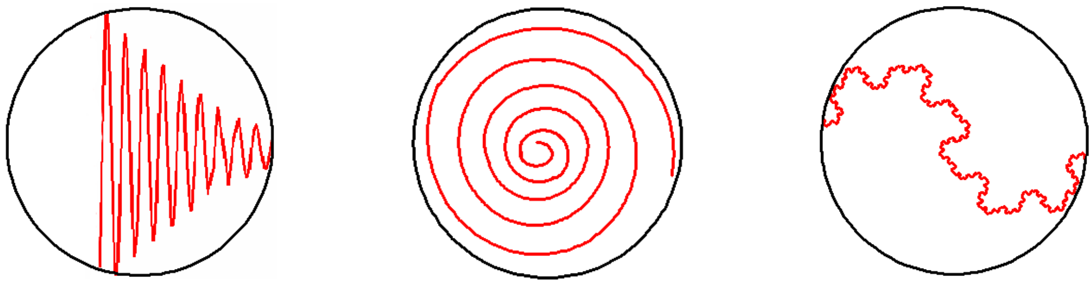
Xét về các chặn trên cho độ dài của các đường cong nhận được trong một đĩa, diện tích của các mặt trong một quả cầu, hoặc tổng quát hơn, độ đo Hausdorff của các tập con của một quả cầu, điều chắc chắn có thể thấy rằng nếu số điểm của giao của các đường cong hoặc các mặt với đường thẳng tổng quát là bị chặn. Khi đó độ dài hoặc diện tích của chúng có thể ước lượng được. Chú ý rằng, các đối tượng không thuần như các đường xoắn ốc (spirals) hoặc các đường dao động (oscillations) không có số giao điểm hữu hạn với đường thẳng tổng quát, vì vậy chúng có chiều dài vô hạn trong đĩa xác định. Chẳng hạn, Ví dụ 4.1.1 minh họa đánh giá độ dài của giao hình tròn với các đối tượng thuần và không thuần trong mặt phẳng.

**Ví dụ 4.1.1.** • **Các đối tượng thuần**



Hình 4.1: $l \leq 2r$ $\qquad$ $l \leq 4dr$

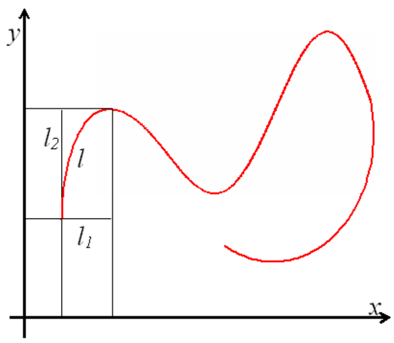
• **Đường dao động, đường xoắn ốc và Fractal**



Hình 4.2: $l = \infty$

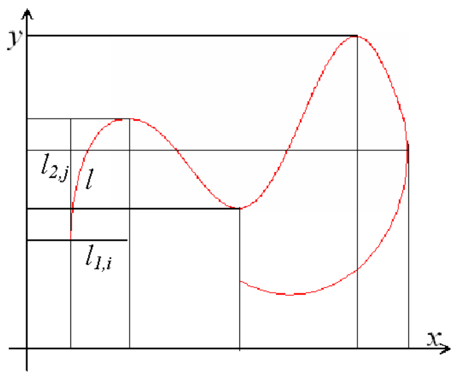
Các đối tượng trong cấu trúc o-tối tiểu có tính chất hữu hạn thành phần liên thông (xem [D1], [D-M], [C] và [L1]). Mặt khác, các kết quả về phân hoạch tế bào, tầm thường hóa định nghĩa được (xem [D1]) và phân tầng định nghĩa được thỏa điều kiện Whitney (xem [L2]) cho phép ta phân hoạch các không gian tổng quát thành các bộ phận mà trên đó các đối tượng thuần có số thành phần liên thông bị chặn bởi hằng số xác định. Hơn nữa, phương pháp tích phân hình học cho phép ta ước lượng độ đo Hausdorff của các tập thông qua số thành phần liên thông của giao các tập đó với các không gian affin tổng quát có chiều thích hợp (xem [F]). Ví dụ 4.1.2 minh họa ý tưởng tích phân hình học.

**Ví dụ 4.1.2.** Ước lượng độ dài của đường cong trong mặt phẳng.




Hình 4.3: $l \leq l_1 + l_2$

Với $p_1$ là phép chiếu lên trục $x$ và $p_2$ là phép chiếu lên trục $y$, ta có thể ước lượng chặn trên cho chiều dài đường cong $C$ trong mặt phẳng (xem hình 4.4).




Hình 4.4: $l \leq \sum_i \sum_j (l_{1,i} + l_{2,j})$, $i \leq \max \#(p_2^{-1}(y) \cap C)$, $j \leq \max \#(p_1^{-1}(x) \cap C)$

Với những lý do đó, trong chương này, chúng tôi sẽ dùng phương pháp tích phân hình học để đưa ra một số ước lượng cho độ đo Hausdorff của các đối tượng định nghĩa được trong cấu trúc o-tối tiểu: Các tập, các thớ của tập, ảnh ngược của các đường cong của ánh xạ,... Các kết quả có thể được xem như là sự tổng quát hóa và cải tiến của một số kết quả trong [H]. Hơn nữa, chúng tôi cũng đưa ra một số chặn trên tường minh cho các trường hợp nửa đại số và nửa-Pfaff.

Nội dung của chương như sau. Phần 2 giới thiệu một số khái niệm và kết quả cần thiết. Trong phần 3 chúng tôi đưa ra đánh giá chặn trên cho các số Betti của thớ ánh xạ định nghĩa được (Mệnh đề 4.3.1). Trong phần 4 chúng tôi đưa ra đánh giá chặn trên cho độ đo Hausdorff của các tập định nghĩa được (Định lý 4.4.1). Trong phần 5 chúng tôi đưa ra đánh giá chặn trên cho độ đo Hausdorff của các thớ định nghĩa được (Định lý 4.5.1) và chặn trên cho độ đo Hausdorff của nghịch ảnh qua ánh xạ định nghĩa được của một họ các đường cong định nghĩa được (Định lý 4.5.4). Phần 6 trình bày định lý Morse-Sard trong cấu trúc o-tối tiểu.

## 4.2 Kiến thức cơ sở

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số khái niệm, các kí hiệu và một số kết quả liên quan cần thiết, sẽ được sử dụng trong chứng minh các kết quả của chương. Nội dung chính bao gồm: Cấu trúc o-tối tiểu, kết quả về tầm thường hóa định nghĩa được, phân hoạch tế bào, phân tầng định nghĩa được và công thức tích phân hình học.

### 4.2.1 Cấu trúc o-tối tiểu

**Định nghĩa 4.2.1.** Ta nói rằng $\mathcal{C}$ là một **phạm trù hình học giải tích** nếu mỗi đa tạp $M$ được trang bị tương ứng một tập $\mathcal{C}(M)$ các tập con của $M$ sao cho năm điều kiện sau thỏa mãn với mọi đa tạp $M$ và $N$:

AG1. $\mathcal{C}(M)$ là một đại số boolean của các tập con của $M$, với $M \in \mathcal{C}(M)$.

AG2. Nếu $A \in \mathcal{C}(M)$, thì $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{C}(M \times \mathbb{R})$.

AG3. Nếu $f : M \to N$ là một ánh xạ giải tích chính thường và $A \in \mathcal{C}(M)$, thì $f(A) \in \mathcal{C}(N)$.

AG4. Nếu $A \subseteq M$ và $(U_i)_{i \in I}$ là một phủ mở của $M$, thì $A \in \mathcal{C}(M)$ nếu và chỉ nếu $A \cap U_i \in \mathcal{C}(U_i)$ với mọi $i \in I$.

AG5. Mọi tập bị chặn trong $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ có hữu hạn biên.

**Ví dụ 4.2.2.** Các tập sub giải tích của đa tạp giải tích thực $M$ bất kỳ là dạng phạm trù hình học giải tích, mà là phạm trù hình học giải tích nhỏ nhất.

**Định nghĩa 4.2.3.** Một **cấu trúc o-tối tiểu** trên một trường thực $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ là một dãy $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sao cho các điều kiện sau được thỏa với mọi $n \in \mathbf{N}$:

$(S_1)$ $\mathcal{D}_n$ là môt đại số Boolean của các tập con của $\mathbb{R}^n$.

$(S_2)$ Nếu $A \in \mathcal{D}_n$, thì $A \times \mathbb{R}$ và $\mathbb{R} \times A \in \mathcal{D}_{n+1}$.

$(S_3)$ Nếu $A \in \mathcal{D}_{n+1}$, thì $\pi(A) \in \mathcal{D}_n$, ở đây $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ chiếu lên $n$ tọa độ đầu.

$(S_4)$ $\mathcal{D}_n$ chứa $\{x \in \mathbb{R}^n : P(x) = 0\}$, với mọi đa thức $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

$(S_5)$ Mỗi tập trong $\mathcal{D}_1$ là hợp hữu hạn của các điểm và khoảng mở.

Một tập thuộc $\mathcal{D}$ được gọi là **định nghĩa được** (trong cấu trúc đó). **Ánh xạ định nghĩa được** trong cấu trúc $\mathcal{D}$ là ánh xạ mà đồ thị của nó là các tập định nghĩa được trong $\mathcal{D}$.

**Ví dụ 4.2.4.** Lớp các tập nửa đại số và lớp được sinh bởi các tập nửa-Pfaff (xem mục 2.4.6) là các ví dụ cho cấu trúc trên, và có nhiều lớp các tập thú vị đã được chứng minh thuộc cấu trúc o-tối tiểu (xem [D1], [D-M]).

**Định nghĩa 4.2.5.** Một tập thuộc vào một phạm trù hình học giải tích hoặc một cấu trúc o-tối tiểu được gọi là một **tập thuần**.

Trong chương này, chúng ta cố định một cấu trúc o-tối tiểu trên $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. "Định nghĩa được" nghĩa là định nghĩa được trong cấu trúc đó.

### 4.2.2 Phân hoạch tế bào

**Định nghĩa 4.2.6.** Một $C^p$ **tế bào** trong $\mathbb{R}^n$ là các đa tạp con lớp $C^p$ liên thông của $\mathbb{R}^n$ thuộc vào $\mathcal{D}$ mà được định nghĩa bằng quy nạp theo $n$ như sau:

- $C^p$ tế bào trong $\mathbb{R}$ là các điểm hoặc các khoảng mở.

- $C^p$ tế bào trong $\mathbb{R}^{n+1}$ là các tập thuộc một trong các dạng sau:
  1. $\Gamma(f) = \{(x,t) : t = f(x)\}$,
  2. $(f,g) = \{(x,t) : f(x) < t < g(x)\}$,
  3. $C \times \mathbb{R}$, $(-\infty, f) = \{(x,t) : t < f(x)\}$ và $(f, +\infty) = \{(x,t) : f(x) < t\}$,

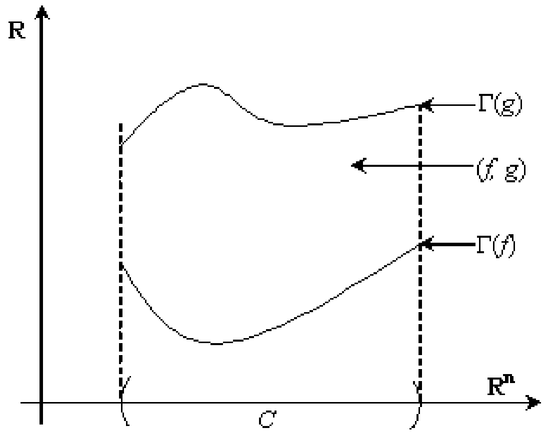
  ở đây $C \subset \mathbb{R}^n$ là một $C^p$ tế bào và $f, g : C \to \mathbb{R}$ là các hàm định nghĩa được thuộc lớp $C^p$, $f < g$.

**Định nghĩa 4.2.7.** Một **phân hoạch** $C^p$ của $\mathbb{R}^n$ được định nghĩa bằng quy nạp theo $n$ như sau:

- Một phân hoạch $C^p$ của $\mathbb{R}$ là một tập hữu hạn các khoảng và các điểm.

- Một phân hoạch $C^p$ của $\mathbb{R}^{n+1}$ là một phân hoạch hữu hạn của $\mathbb{R}^{n+1}$ vào các $C^p$ tế bào $C$, sao cho tập hợp tất cả các phép chiếu $\pi(C)$ là một phân hoạch $C^p$ của $\mathbb{R}^n$, ở đây $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ là phép chiếu lên $n$ tọa độ đầu.

Ta nói rằng một phân hoạch tương thích với một lớp $\mathcal{A}$ của các tập con của $\mathbb{R}^n$, nếu mỗi $S \in \mathcal{A}$ là hợp của một số tế bào của phân hoạch.




Hình 4.5: Tế bào trong $\mathbb{R}^{n+1}$

**Định lý 4.2.8** (Phân hoạch tế bào)**.**
*$(I_n)$ Cho $S_1, \ldots, S_k$ là các tập định nghĩa được trong $\mathbb{R}^n$, khi đó tồn tại một phân hoạch $C^p$ của $\mathbb{R}^n$ tương thích với $\{S_1, \ldots, S_k\}$.*
*$(II_n)$ Với mỗi hàm định nghĩa được $f : S \to \mathbb{R}$, $S \subset \mathbb{R}^n$, tồn tại một phân hoạch $C^p$ của $\mathbb{R}^n$ tương thích với $S$ sao cho mỗi tế bào $C \subset S$ của phân hoạch, $f|_C$ thuộc lớp $C^p$.*

*Chứng minh.* Xem [D1, Ch.3 Theorem 2.11]. □

Chú ý rằng bởi định lý phân hoạch tế bào, **chiều** của một tập định nghĩa được $A$ được định nghĩa bởi

$$\dim A = \max\{\dim C : C \text{ là các đa tạp con lớp } C^1 \text{ chứa trong } A\}.$$

### 4.2.3 Một số tính chất của cấu trúc o-tối tiểu

Các tính chất quan trọng của cấu trúc o-tối tiểu có thể tham khảo ở [D1], [D-M], [C], [L1] và [W]. Phần này trình bày một số tính chất cơ bản và các tính chất về chiều của cấu trúc o-tối tiểu phục vụ cho các chứng minh kết quả của chương.

**Bổ đề 4.2.9.**

*$(i)$ Nếu $A \subseteq \mathbb{R}^m$ là định nghĩa được, thì $cl(A)$ và $int(A)$ cũng định nghĩa được.*

*(ii) Nếu $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^m$ là các tập định nghĩa được, và $A$ là mở trong $B$, thì tồn tại một tập mở định nghĩa được $U \subseteq \mathbb{R}^m$ với $U \cap B = A$.*

*Chứng minh.* Xem [D1, Ch.1 Lemma 3.3]. □

**Bổ đề 4.2.10.**

*(i) Các tập con liên thông định nghĩa được của $\mathbb{R}$ gồm các dạng sau: tập rỗng, các khoảng, các tập $[a, b)$ với $-\infty < a < b \leq +\infty$, các tập $(a, b]$ với $-\infty \leq a < b < +\infty$, và các tập $[a, b]$ với $-\infty < a \leq b < +\infty$.*

*(ii) Ảnh của các tập liên thông định nghĩa được $X \subseteq \mathbb{R}^m$ dưới ánh xạ liên tục định nghĩa được $f : X \to \mathbb{R}^n$ là liên thông định nghĩa được.*

*(iii) Nếu $X$ và $Y$ là các tập con định nghĩa được của $\mathbb{R}^m$, $X \subseteq Y \subseteq \overline{X}$, và $X$ là liên thông định nghĩa được, thì $Y$ là liên thông định nghĩa được.*

*(iv) Nếu $X$ và $Y$ là các tập con liên thông định nghĩa được của $\mathbb{R}^m$ và $X \cap Y \neq \emptyset$, thì $X \cup Y$ là liên thông định nghĩa được.*

*Chứng minh.* Xem [D1, Ch.1 Lemma 3.6]. □

**Mệnh đề 4.2.11.**

*(i) Nếu $X \subseteq Y \subseteq \mathbb{R}^m$ và $X, Y$ là định nghĩa được, thì $\dim X \leq \dim Y \leq m$.*

*(ii) Nếu $X \subseteq \mathbb{R}^m$ và $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ là định nghĩa được và tồn tại một song ánh định nghĩa được giữa $X$ và $Y$, thì $\dim X = \dim Y$.*

*(iii) Nếu $X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ là các tập định nghĩa được, thì $\dim(X \cup Y) = \max\{\dim X, \dim Y\}$.*

*Chứng minh.* Xem [D1, Ch.4 Proposition 1.3]. □

**Mệnh đề 4.2.12.** *Cho $S \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ là định nghĩa được. Cho $d \in \{-\infty, 0, 1, \ldots, n\}$, đặt*

$$S(d) = \{a \in \mathbb{R}^m : \dim S_a = d\}.$$

*Khi đó $S(d)$ là định nghĩa được và bộ phận của $S$ trên $S(d)$ có số chiều được cho bởi*

$$\dim \left( \bigcup_{a \in S(d)} \{a\} \times S_a \right) = \dim (S(d)) + d,$$

*ở đây,*

$$S_a = \{x \in \mathbb{R}^n : (a, x) \in S\}.$$

*Chứng minh.* Xem [D1, Ch.4. Proposition 1.5]. □

Từ Mệnh đề 4.2.11 và 4.2.12 cho ta hệ quả sau:

**Hệ quả 4.2.13.**

(*i*) $\dim S = \max_{0\le d\le n}(\dim S(d) + d) \ge \dim \pi S$, *với* $\pi S \subset \mathbb{R}^m$.

(*ii*) *Cho* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *là định nghĩa được và* $f : X \to \mathbb{R}^m$ *là ánh xạ định nghĩa được. Khi đó với mỗi* $d \in \{0, \ldots, n\}$ *tập* $S_f(d) = \{a \in \mathbb{R}^m : \dim f^{-1}(a) = d\}$ *là định nghĩa được và* $\dim f^{-1}(S_f(d)) = \dim S_f(d) + d$. *Hơn nữa,* $\dim X \ge \dim f(X)$.

(*iii*) $\dim(A \times B) = \dim A + \dim B$, *với* $A, B$ *là các tập định nghĩa được.*

*Chứng minh.* Xem [D1, Ch.4. Corollary 1.6] . □

Ký hiệu $\Phi^p$ là tập các ánh xạ định nghĩa được, song ánh, lẻ, tăng chặt thuộc lớp $C^p$ từ $\mathbb{R}$ vào $\mathbb{R}$ và $p-$phẳng tại 0.

Cho $g = (g_1, \ldots, g_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ là một đường thuộc $\mathcal{D}$. Định nghĩa

$$\begin{aligned}\mathrm{Mono}(g) \quad := \quad & \{t \in (a, b) : \text{ tồn tại } a', b' \text{ với } a < a' < t < b' < b \\ & \text{sao cho một vài } g_t \text{ tăng trên } (a', t) \text{ và giảm chặt trên } (t, b'), \\ & \text{hoặc một vài } g_t \text{ giảm trên } (a', t) \text{ và tăng chặt trên } (t, b')\}\end{aligned}$$

Chú ý rằng $\mathrm{Mono}(g)$ là hữu hạn, và khi đó nếu $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ và các điểm của $\mathrm{Mono}(g)$ thuộc $t_1, \ldots, t_{k-1}$, thì $\mathrm{length}(g) \le \sum_{i=1}^k \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_1$.

**Bổ đề 4.2.14.** *Cho* $B \in \mathcal{D}_n$ *là compact và* $h : B \to \mathbb{R}^m$ *là ánh xạ liên tục định nghĩa được. Khi đó tồn tại* $\psi \in \Phi^p$ *sao cho* $length(h \circ g) \le N\psi^{-1}(length(g))$ *với mọi đường định nghĩa được* $g : [a, b] \to B$, *ở đây* $N = 1 + \#(Mono(h \circ g))$.

*Chứng minh.* Xem [D-M, C.17]. □

**Mệnh đề 4.2.15** (Chặn đều trên các thớ - [D-M, 4.4])**.** *Cho* $A \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ *thuộc vào* $\mathcal{D}$. *Khi đó tồn tại* $N \in \mathbf{N}$ *sao cho với mọi* $x \in \mathbb{R}^m$, *tập* $A_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in A\}$ *có nhiều nhất* $N$ *thành phần liên thông.*

**Định lý 4.2.16** ([D-M, 4.5])**.** *Cho $A \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$ là tập định nghĩa được, cho $\pi A \subseteq \mathbb{R}^m$ là chiếu của $A$ lên $m$ tọa độ đầu. Khi đó tồn tại một ánh xạ $f : \pi A \to \mathbb{R}^n$ thuộc vào $\mathcal{D}$ sao cho đồ thị $\Gamma(f) \subseteq A$. Đặc biệt, nếu $b \subseteq \mathbb{R}^m$ và $g : B \to \mathbb{R}^n$ thuộc $\mathcal{D}_{m+n}$ thì tồn tại $f : g(B) \to \mathbb{R}^m$ thuộc vào $\mathcal{D}$ sao cho*

$$f(g(x)) = x \text{ với mọi } x \in B.$$

### 4.2.4 Phân tầng định nghĩa được

**Định nghĩa 4.2.17.** Một $C^p$**-phân tầng định nghĩa được** của $X \subset \mathbb{R}^m$ là một phân hoạch $\mathcal{S}$ của $X$ vào hữu hạn các tập con, được gọi là các **tầng** (strata), sao cho:

($S_1$) Mỗi tầng (stratum) là một đa tạp con lớp $C^p$ của $\mathbb{R}^m$ và cũng là các tập định nghĩa được;

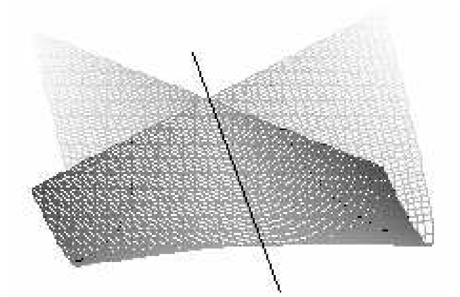
($S_2$) Với mỗi $S \in \mathcal{S}, \overline{S} \setminus S$ là hợp của một số tầng.

Ta nói rằng $\mathcal{S}$ thỏa điều kiện Whitney ($a$) nếu thỏa điều sau: với mọi $S, R \in \mathcal{S}$ với $S \subset \overline{R}$, cho một dãy các điểm $(x_k)$ trong $R$ hội tụ đến một điểm $y$ của $S$ sao cho $T_{x_k}R$ hội tụ đến một không gian vector con $T$ của $\mathbb{R}^m$, ta có $T_yS \subset T$.

Ta nói rằng một phân tầng $\mathcal{S}$ là **tương thích** với một lớp các tập con $\mathcal{A}$ của $\mathbb{R}^m$ nếu với mỗi $S \in \mathcal{S}$ và $A \in \mathcal{A}$, $S \subset A$ hoặc $S \cap A = \emptyset$.

**Định nghĩa 4.2.18.** Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ định nghĩa được. Một $C^p-$phân tầng của $f$ là một bộ $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ở đây $\mathcal{X}$ và $\mathcal{Y}$ là các $C^p-$phân tầng Whitney định nghĩa được của $X$ và $Y$ tương ứng, và với mỗi $S \in \mathcal{X}$, tồn tại $R \in \mathcal{Y}$, sao cho $f(S) \subset R$ và $f|_S : S \to R$ là một phép nhúng lớp $C^p$.

**Ví dụ 4.2.19.** Trong $\mathbb{R}^3$ cho mặt $V$ xác định bởi: $x^2 - zy^2 = 0$ (cái dù Whitney).
Phân hoạch: $Oz, V \setminus Oz, \mathbb{R}^3 \setminus V$, không là phân tầng vì không thỏa ($S_2$).
Phân hoạch: $O, \{(0,0,z) : z > 0\}, \{(0,0,z) : z < 0\}, V \setminus Oz, \mathbb{R}^3 \setminus V$, là phân tầng tương thích với $V$.



Hình 4.6: ví dụ phân tầng định nghĩa được

**Định lý 4.2.20.** *Cho $f : X \to Y$ là một ánh xạ liên tục định nghĩa được. Cho* $\mathbf{A}$ *và* $\mathbf{B}$ *là các tập hữu hạn các tập con định nghĩa được của $X$ và $Y$ tương ứng. Khi đó tồn tại một $C^p-$phân tầng $(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ của $f$ sao cho $\mathcal{X}$ là tương thích với* $\mathbf{A}$ *và $\mathcal{Y}$ là tương thích với* $\mathbf{B}$.

*Chứng minh.* Xem [L2, Theorem 2.1]. □

### 4.2.5 Tầm thường hóa định nghĩa được

**Định nghĩa 4.2.21.** Xét ánh xạ định nghĩa được $f : S \to A$, ở đây $A \subseteq \mathbb{R}^m$ và $S \subseteq \mathbb{R}^n$ là các tập định nghĩa được. Xem $A$ như là một không gian cơ sở hoặc không gian tham số, $f$ mô tả họ của các tập $(f^{-1}(a))_{a \in A}$. Một **phép tầm thường hóa định nghĩa được** của $f$ là một bộ $(F, \lambda)$ bao gồm một tập định nghĩa được $F \subseteq \mathbb{R}^N$, với một vài $N$, và một ánh xạ định nghĩa được $\lambda : S \to F$ sao cho

$$(f, \lambda) : S \to A \times F \text{ là một phép đồng phôi.}$$

Như vậy $(f, \lambda)$ đồng nhất hóa $S$ với tích đề các $A \times F$, và dưới phép đồng nhất này $f$ tương ứng với ánh xạ chiếu $A \times F \to A$. Chú ý rằng khi đó $f$ và $\lambda$ liên tục, và $(f, \lambda)$ ánh xạ mỗi thớ $f^{-1}(a)$ của $f$ đồng phôi vào $\{a\} \times F$, đặc biệt tất cả các thớ là đồng phôi định nghĩa được với $F$.

Ta gọi $f$ là **tầm thường định nghĩa được** nếu $f$ có một phép tầm thường hóa định nghĩa được. Cho tập con định nghĩa được $A' \subseteq A$, ta nói $f$ là tầm thường định nghĩa được trên $A'$ nếu ánh xạ hạn chế $f|_{f^{-1}(A')} : f^{-1}(A') \to A'$ là tầm thường định nghĩa được. Chú ý rằng nếu $f$ là tầm thường định nghĩa được, thì $f$ là tầm thường định nghĩa được trên mỗi tập con định nghĩa được của không gian cơ sở $A$: nếu $(f, \lambda)$ là một phép tầm thường hóa định nghĩa được của $f$ và $A' \subseteq A$ là định nghĩa được, thì $\left(F, \lambda|_{f^{-1}(A')}\right)$ là một phép tầm thường hóa định nghĩa được của $f|_{f^{-1}(A')} : f^{-1}(A') \to A'$.

**Định lý 4.2.22** (Định lý tầm thường Hardt)**.** *Cho $f : S \to A$ là ánh xạ liên tục định nghĩa được, ở đây $A \subseteq \mathbb{R}^m$ và $S \subseteq \mathbb{R}^n$ là các tập định nghĩa được. Khi đó tồn tại một phân hoạch hữu hạn $A = A_1 \cup \cdots \cup A_M$ của không gian cơ sở $A$ vào các tập định nghĩa được $A_i$ sao cho $f$ là tầm thường định nghĩa được trên mỗi $A_i$.*

*Chứng minh.* Xem [D1, Ch.9 Theorem 1.2]. □

### 4.2.6 Tập nửa-Pfaff

• **Xích Pfaff.** Một **xích Pfaff** có **độ dài** $r \geq 0$ và *bậc* $\alpha \geq 1$ trong một miền mở $U \subseteq \mathbb{R}^m$ là một dãy các hàm giải tích $f = (f_1, \ldots, f_l)$ trong $U$ thỏa một hệ các phương trình Pfaff

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = P_{ij}(x, f_1(x), \ldots, f_i(x)), \ \forall x \in U \quad (1 \leq i \leq l, \ 1 \leq j \leq n).$$

Ở đây $P_{ij}$ là các đa thức có bậc không vượt quá $\alpha$.

• **Hàm Pfaff.** Ta nói rằng $q$ là một **hàm Pfaff** của bậc $\beta$ với xích Pfaff $f$ nếu tồn tại một đa thức $Q$ có bậc không vượt quá $\beta$ sao cho

$$q(x) = Q(x, f_1(x), \ldots, f_l(x)), \quad \text{với mọi } x \in U.$$

**Ví dụ 4.2.23.**

1. Các đa thức là các hàm Pfaff mà $l = 0$.

2. Hàm mũ $f_1(x) = e^x$ là Pfaff, với $l = 1$ và $\alpha = 1$, bởi vì $f_1' = f_1$. Tổng quát hơn, ta có thể định nghĩa lặp lại các hàm mũ bằng quy nạp $f_r(x) = \exp(f_{r-1}(x))$ với mọi $x$. Khi đó, từ $f_r' = f_{r-1}' f_r = f_1 \cdots f_r$, $(f_1, \ldots, f_r)$ là một xích Pfaff có độ dài $r$ và bậc $r$ với mọi $r$.

3. Cho $U = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Đặt $f(x) = x^{-1}$ và $g(x) = \ln|x|$. Khi đó $(f, g)$ là một xích Pfaff có bậc $\alpha = 2$ trên $U$, do $f' = -f^2$ và $g' = f$.
4. Cho $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ và $g(x) = \arctan x$. Khi đó $(f, g)$ là một xích Pfaff có bậc $\alpha = 3$ trên $\mathbb{R}$, do $f' = -2xf$ và $g' = f$.

• **Công thức không lượng tử (QF formula).** Cho $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_s\}$ là một tập các hàm Pfaff. Một **công thức** không lượng tử (QF formula) với các **nguyên tử** (atom) trong $\mathcal{P}$ được xây dựng như sau:

- Một nguyên tử có dạng $p_i \star 0$, ở đây $1 \le i \le s$ và $\star \in \{>, =, <\}$. Nó là một QF formula;

- Nếu $\Phi$ và $\Psi$ là các QF formulae, thì hội của chúng $\Phi \wedge \Psi$, tuyển của chúng $\Phi \vee \Psi$, và phép lấy phần bù $\neg\Phi$ là các QF formulae.

• **Tập nửa-Pfaff.** Một tập $A \subseteq U$ được gọi là **nửa-Pfaff** nếu tồn tại một tập hữu hạn $\mathcal{P}$ của các hàm Pfaff và một QF formula $\Phi$ với các nguyên tử trong $\mathcal{P}$ sao cho

$$A = \{x \in U : \Phi(x)\}.$$

• **Format của tập nửa-Pfaff.** Cho $A$ là một tập nửa-Pfaff như trên. Khi đó **format** của $A$ là tập dữ liệu $F = F(A) = (m, l, \alpha, \beta, s)$, ở đây $m$ là số biến, $l$ là chiều dài của $f$, $\alpha$ là maximum của các bậc của các đa thức $P_{ij}$, $\beta$ là maximum của các bậc của các hàm trong $\mathcal{P}$, và $s$ là số các hàm trong $\mathcal{P}$.

### 4.2.7 Độ đo tích phân hình học

• **Tích nội.** Ta gọi một hàm song tuyến tính

$$B : V \times V \to \mathbb{R}$$

là một **tích nội** nếu $B$ là đối xứng và thỏa

$$B(x, x) > 0 \text{ với mọi } x \in V, x \neq 0.$$

Khi đó ta ký hiệu $x \cdot y$ thay cho $B(x, y)$ và định nghĩa chuẩn

$$\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}.$$

• **Đơn ánh trực giao.** Một ánh xạ tuyến tính $f : V \to V'$, ở đây $V'$ là một không gian vector khác với một tích nội (cũng được ký hiệu bởi $\cdot$), được gọi là một **đơn ánh trực giao** nếu và chỉ nếu $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$, khi $x, y \in V$. Ký hiệu $O(m, n)$ là tập tất cả các đơn ánh trực giao từ $\mathbb{R}^m$ vào $\mathbb{R}^n$. Hơn nữa, $O(m) = O(m, m)$ là nhóm trực giao của $\mathbb{R}^m$.

• **Phép chiếu trực giao.** Cho $f : V \to V'$ là ánh xạ tuyến tính. Khi đó, $f^* : V' \to V$ được gọi là ánh xạ tuyến tính liên hợp của $f$ nếu

$$x \cdot f^*(y) = f(x) \cdot y, \text{ với } x \in V, y \in V'.$$

Nếu $f$ là đơn ánh trực giao thì $f^*$ được gọi là một **phép chiếu trực giao**. Do đó, một ánh xạ tuyến tính $g : V' \to V$ là một phép chiếu trực giao nếu và chỉ nếu $g \circ g^* = Id_V$. Ta ký hiệu $O^*(m, n)$ là không gian của tất cả các phép chiếu trực giao từ $\mathbb{R}^m$ vào $\mathbb{R}^n$, khi đó

$$O^*(m, n) = \{f^* : f \in O(n, m)\}.$$

• **Độ đo Hausdorff.** Cho $A$ là tập con trong $\mathbb{R}^n$ và $\alpha \geq 0$.
Với mỗi $\varepsilon > 0$, họ các $\varepsilon$ - phủ $A$ được ký hiệu là

$$\mathcal{C}(\varepsilon, A) = \{(U_i)_{i \in \mathbf{N}} : A \subset \bigcup_{i \in \mathbf{N}} U_i \text{ và } \operatorname{diam}(U_i) \leq \varepsilon\}$$

Đặt

$$\mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(A) = c(\alpha) \inf\{\sum_i \operatorname{diam}(U_i)^\alpha : (U_i)_{i \in \mathbf{N}} \in \mathcal{C}(\varepsilon, A)\}$$

trong đó $c(\alpha) = \dfrac{\Gamma(\frac{1}{2})^\alpha}{2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2} + 1)}$. Khi $\alpha$ nguyên $c(\alpha)$ là thể tích hình cầu $\alpha$ - chiều, có đường kính là 1.

Khi $\varepsilon$ giảm về 0, thì họ phủ $\mathcal{C}(\varepsilon, A)$ tăng, nên inf của vế phải giảm. Từ đó có thể định nghĩa **độ đo Hausdorff chiều $\alpha$ của $A$** là

$$\mathcal{H}^\alpha(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(A)$$

**Mệnh đề 4.2.24.** *$\mathcal{H}^\alpha$ là một độ đo trên $\mathbb{R}^n$ mà mọi tập Borel là $\mathcal{H}^\alpha$- đo được.*

*Chứng minh.* Rõ ràng $\mathcal{H}^\alpha(\emptyset) = 0$, và nếu $(A_i)$ là họ đếm được các tập con của $\mathbb{R}^n$ thì $\mathcal{H}^\alpha(\bigcup_i A_i) \leq \sum_i \mathcal{H}^\alpha(A_i)$. Theo tiêu chuẩn Caratheodory, để chứng minh các tập Borel là $\mathcal{H}^\alpha$ - đo được, ta cần chứng minh

$$(C) \qquad \mathcal{H}^\alpha(A \cup B) = \mathcal{H}^\alpha(A) + \mathcal{H}^\alpha(B), \text{ khi } d(A, B) > 0.$$

Thật vậy, $\mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(A \cup B) = \mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(A) + \mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(B)$, khi $d(A, B) > 2\varepsilon$. Cho $\varepsilon \to 0$, ta có tiêu chuẩn $(C)$. □

**• Một số tính chất của độ đo Hausdorff.**

$(i)$ Cho $f : A \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ Hölder, i.e. tồn tại $L, p > 0$ sao cho

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|^p \ (x, y \in A).$$

Khi đó $\mathcal{H}^{\alpha/p}(f(A)) \leq \dfrac{c(\alpha/p)}{c(\alpha)} L^{\alpha/p} \mathcal{H}^\alpha(A)$.

Đặc biệt, khi $f$ là ánh xạ Lipschitz, i.e. $p = 1$, thì $\mathcal{H}^\alpha(f(A)) \leq L^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A)$.

$(ii)$ Khi $S$ là phép đồng dạng tỉ số $\lambda > 0$, thì $\mathcal{H}^\alpha(S(A)) = \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A)$.

$(iii)$ Độ đo Hausdorff là bất biến qua phép đẳng cự, và vì vậy qua phép tịnh tiến.

*Chứng minh.* Nếu $(U_i)$ là một họ $\varepsilon$ - phủ $A$, thì từ tính chất Hölder ta có $\mathrm{diam} f(A \cap U_i) \leq L \mathrm{diam}(A \cap U_i)^p$. Vậy họ $(f(A \cap U_i))$ là một $L\varepsilon^p$ - phủ $f(A)$.

Vậy $\sum_i \mathrm{diam}(f(A \cap U_i))^{\alpha/p} \leq L^{\alpha/p} \sum_i \mathrm{diam}(U_i)^\alpha$.

Suy ra $\mathcal{H}^{\alpha/p}_{L\varepsilon^p}(f(A)) \leq \dfrac{c(\alpha/p)}{c(\alpha)} L^{\alpha/p} \mathcal{H}^\alpha_\varepsilon(A)$. Cho $\varepsilon \to 0$, ta có $(i)$.

Để chứng minh $(ii)$, áp dụng $(i)$ cho $S$ và $S^{-1}$, ta có

$$\lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A) \leq \mathcal{H}^\alpha(S(A)) \leq \lambda^\alpha \mathcal{H}^\alpha(A)$$

Do phép đẳng cự là Lipschitz với $L = 1$ và song ánh nên $(iii)$ suy từ $(i)$. □

**Nhận xét 4.2.25.** Bởi [F, Example 2.7.16(6)], nhóm trực giao $O(m)$ tác động bắc cầu trên $O^*(m,n)$ theo phép nhân vế phải. Tác động này cảm sinh duy nhất một độ đo bất biến $\theta^*_{m,n}$ trên $O^*(m,n)$ với $\theta^*_{m,n}[O^*(m,n)] = 1$.

• **Công thức Cauchy-Crofton.** Từ mối quan hệ giữa độ đo Hausdorff và độ đo tích phân hình học, và cách biểu diễn của độ đo tích phân hình học, ta có công thức sau:

**Định lý 4.2.26** (Federer 1947)**.** *Cho $k \leq m$. Với mọi tập con định nghĩa được $k-$chiều $A$ của $\mathbb{R}^m$, ta có*

$$\mathcal{H}^k(A) = c(m,k)\int_{O^*(m,k)}\int_{\mathbb{R}^k} \#(A \cap p^{-1}(y))dyd\theta^*_{m,k}p, \tag{4.1}$$

*ở đây* $c(m,k) = \dfrac{\Gamma(\frac{m+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{k+1}{2})\Gamma(\frac{m-k+1}{2})}$, *và* $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}dt \ (s > 0)$.

*Chứng minh.* Do các tập định nghĩa được có thể được phân hoạch vào hữu hạn các đa tạp con lớp $C^1$, từ đó áp dụng [F, Theorem 2.10.15] và [F, 3.2.26] ta nhận được kết quả của định lý. □

• **Công thức co-area.**

Trường hợp tuyến tính: Cho $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là ánh xạ tuyến tính, với $m \leq n$.
Đồng nhất $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^m \times O, \mathbb{R}^{n-m} = O \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.
Với $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là phép chiếu chính tắc, theo công thức Fubini, ta có

$$\mathcal{H}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(p^{-1}(y) \cap A)d\mathcal{H}^m(y).$$

Trường hợp $\lambda$ toàn ánh, khi đó $F = \lambda^{-1}(0)$ là không gian vector con $(n-m)$-chiều. Vậy tồn tại $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \in O(n)$, sao cho $g(F) = \mathbb{R}^{n-m}, g(F^{\perp}) = \mathbb{R}^m$. Ta có $\lambda = \sigma \circ p \circ g$, với $\sigma : \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^{n-m}$ là song ánh.

Khi đó với $A \subset \mathbb{R}^n$, ta có

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n(A) &= \mathcal{H}^n(g(A)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(p^{-1}(y) \cap g(A)) d\mathcal{H}^m(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(g^{-1} \circ p^{-1}(y) \cap A) d\mathcal{H}^m(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(g^{-1} \circ p^{-1} \circ \sigma^{-1}(z) \cap A) |\det \sigma^{-1}|\, d\mathcal{H}^m(z) \quad \text{(đổi biến } y = \sigma(z))
\end{aligned}$$

Vậy $|\det \sigma| \mathcal{H}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(\lambda^{-1}(z) \cap A) d\mathcal{H}^m(z)$.
Mặt khác, $\lambda \circ \lambda^* = (\sigma \circ p \circ g) \circ (\sigma \circ p \circ g)^* = \sigma \circ \sigma^*$.

Ta có công thức co-area cho trường hợp tuyến tính:

$$\sqrt{\det \lambda \circ \lambda^*} \mathcal{H}^n(A) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(\lambda^{-1}(z) \cap A) d\mathcal{H}^m(z), \quad A \subset \mathbb{R}^n.$$

Trường hợp $C^1$: Cho $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ thuộc $C^1$, và $n \geq m$. Khi đó với mọi $A \subset \mathbb{R}^n$ là tập đo được, ta có

$$\int_A Jf(x) d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(f^{-1}(y) \cap A) d\mathcal{H}^m(y),$$

trong đó $Jf(x) = \sqrt{\det df(x) \circ df(x)^*}$ (Jacobi suy rộng khi $n \geq m$).

## 4.3 Chặn đều cho các số Betti của các thớ định nghĩa được

**Mệnh đề 4.3.1.** *Cho $f : A \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ liên tục định nghĩa được. Khi đó với mỗi $i \in \mathbf{N}$, tồn tại một số dương $M_i$, sao cho số Betti thứ $i$ của các thớ của $f$ bị chặn bởi $M_i$:*

$$b_i(f^{-1}(y)) \leq M_i, \text{ với mọi } y \in \mathbb{R}^n.$$

*Đặc biệt, số thành phần liên thông của các thớ của $f$ bị chặn đều.*
*Hơn nữa, nếu $f$ là nửa đại số (tương ứng nửa-Pfaff), thì $M_i$ chỉ phụ thuộc vào lược đồ (tương ứng format) của $f$.*

*Chứng minh.* Bởi Định lý tầm thường Hardt 4.2.22, tồn tại một phân hoạch hữu hạn $f(A) = C_1 \cup \ldots \cup C_M$ của $A$ thành các tập định nghĩa được $C_i$ sao cho $f$ là tầm thường định nghĩa được trên mỗi $C_i$. Do đó họ các thớ của $f$ chỉ có hữu hạn loại topo định nghĩa được. Do vậy các số Betti của các thớ bị chặn đều. Hơn nữa, khi $f$ là nửa đại số hoặc nửa-Pfaff, bởi [Ba-P-R2], [G-V] hoặc [K], [Z], [G-V-Z], các số Betti bị chặn đều bởi các hằng số chỉ phụ thuộc vào lược đồ hoặc format của $f$. □

## 4.4 Độ đo Hausdorff của các tập định nghĩa được

Cho $A$ là một tập con của $\mathbb{R}^m$. Với mỗi $k \in \{0, \ldots, m\}$, định nghĩa

$$B_{0,m-k}(A) = \sup\{b_0(A \cap p^{-1}(y)) : p \in O^*(m,k), y \in \mathbb{R}^k\}.$$

Nếu $A$ là định nghĩa được, áp dụng Mệnh đề 4.3.1 với phép chiếu chính tắc

$$\{(x,p,y) \in A \times O^*(m,k) \times \mathbb{R}^k : p(x) = y\} \to \{(p,y) \in O^*(m,k) \times \mathbb{R}^k\},$$

cho ta chặn trên của $B_{0,m-k}(A)$. Hơn nữa, nếu $A$ là nửa đại số hoặc nửa-Pfaff, thì $B_{0,m-k}(A)$ bị chặn bởi một hằng số tường minh chỉ phụ thuộc vào lược đồ hoặc format của $A$ (xem ví dụ phần sau).

**Định lý 4.4.1.** *Cho $A, B$ là các tập con định nghĩa được của $\mathbb{R}^m$. Giả sử $B$ là compact,* $\dim A = k$, *và $A \subset B$. Khi đó*

$$\mathcal{H}^k(A) \le c(m,k) B_{0,m-k}(A) \sup_{p \in O^*(m,k)} \mathcal{H}^k(p(B)).$$

*Hơn nữa, nếu $A, B$ là các tập nửa đại số hoặc nửa-Pfaff, thì*

$$\mathcal{H}^k(A) \le C \sup_{p \in O^*(m,k)} \mathcal{H}^k(p(B)),$$

*ở đây $C$ là một hằng số chỉ phụ thuộc vào "lược đồ" hoặc "format" của $A$.*

*Chứng minh.*

Giả sử $p \in O^*(m,k)$. Đặt

$$S_p(d) = \{w \in \mathbb{R}^k : \dim\big(A \cap p^{-1}(w)\big) = d\}.$$

Sử dụng Hệ quả 4.2.13 $(ii)$ ta có

$$\dim\left(A \cap p^{-1}(S_p(d))\right) = \dim\left(S_p(d)\right) + d.$$

Mặt khác

$$\dim\left(A \cap p^{-1}(S_p(d))\right) \leq \dim A = k.$$

Như vậy, nếu $\dim\left(S_p(d)\right) = k$ thì

$$d \leq 0.$$

Vậy $\dim(A \cap p^{-1}(w)) \leq 0$, với mọi $w \in \mathbb{R}^k$ bên ngoài một tập định nghĩa được có chiều bé hơn $k$. Bởi công thức Cauchy-Crofton (4.1), ta ước lượng

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k(A) &= c(m,k)\int_{O^*(m,k)}\int_{\mathbb{R}^k} \#(A \cap p^{-1}(w))dwd\theta^*_{m,k}p \\
&\leq c(m,k)B_{0,m-k}(A)\int_{O^*(m,k)}\int_{\mathbb{R}^k} 1_{p(A)}dwd\theta^*_{m,k}p \\
&\leq c(m,k)B_{0,m-k}(A)\int_{O^*(m,k)}\int_{\mathbb{R}^k} 1_{p(B)}dwd\theta^*_{m,k}p \\
&\leq c(m,k)B_{0,m-k}(A)\sup_{p\in O^*(m,k)} \mathcal{H}^k(p(B)).
\end{aligned}$$

Khẳng định cuối nhận được từ Mệnh đề 4.3.1. □

**Hệ quả 4.4.2.** *Cho $A$ là một tập con định nghĩa được của $\mathbb{R}^m$ có chiều $k$. Khi đó*

$$\mathcal{H}^k(A \cap \mathbf{B}^m_r) \leq c(m,k)B_{0,m-k}(A)\,Vol_{\,k}(\mathbf{B}^k)r^k,$$

*với mọi quả cầu $\mathbf{B}^m_r$ trong $\mathbb{R}^m$.*

*Chứng minh.* Từ định lý trước, ta suy ra

$$\mathcal{H}^k(A \cap \mathbf{B}^m_r) \leq c(m,k)B_{0,m-k}(A)\mathcal{H}^k(\mathbf{B}^k_r) = c(m,k)B_{0,m-k}(A)\mathrm{V}ol_{\,k}(\mathbf{B}^k)r^k$$

□

**Ví dụ 4.4.3.**

**Trường hợp đại số.** Khi $A \subset \mathbb{R}^m$ là một tập đại số $k$-chiều bậc $d$, thì

$$\mathcal{H}^k(A \cap \mathbf{B}^m_r) \leq c(m,k)d\mathrm{V}ol_{\,k}(\mathbf{B}^k)r^k.$$

Đặc biệt, khi $A$ là một đường cong đại số bậc $d$ trong mặt phẳng, thì chiều dài

$$l(A \cap \mathbf{B}_r^2) \leq c(2,1)d2r = \pi dr.$$

**Trường hợp nửa đại số.** Khi $A \subset \mathbb{R}^m$ là một tập nửa đại số $k$-chiều với lược đồ $D = (m, p, s_1, \ldots, s_p, (d_{ij})_{1=1,\ldots,p, j=1,\ldots,s_i})$, thì

$$\mathcal{H}^k(A \cap \mathbf{B}_r^m) \leq c(m,k)B_0(D)\mathrm{Vol}_k(\mathbf{B}^k)r^k.$$

**Nhận xét 4.4.4.** Áp dụng các kết quả về chặn trên cho các số Betti, ta nhận được một số đánh giá cho $B_0(D)$ như sau:

$(a)$ Theo [Ba-P-R2, Theorem 5.1],

$$B_0(D) = \frac{2^m}{m!}\sum_{i=1}^{p}((d_i s_i)^m + O(s_i^{m-1})),$$

với $d_i = \max_{1 \leq j \leq s_i} d_{ij}$ và $m$ cố định được xét.

$(b)$ Theo [Y-C, Theorem 4.8],

$$B_0(D) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} d_i(d_i - 1)^{m-1}, \text{ với } d_i = \sum_{j=1}^{s_i} d_{ij}.$$

$(c)$ Cho $A$ là tập nửa đại số cơ sở được định nghĩa bởi

$$A = \{x \in \mathbb{R}^k : P_1(x) \geq 0, \ldots, P_m(x) \geq 0\}.$$

Nếu $\deg(P_i) \leq d$. Áp dụng Định lý 3.3.1 ta nhận được

$$B_0(D) \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l}\binom{m}{j}d(2d-1)^k,$$

với $l = \min\{m, k\}$.

Nếu $\deg(P_i) \leq 2, m \leq k$. Áp dụng [Ba-K, Theorem 1.6], ta nhận được

$$B_0(D) \leq \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m}\binom{m}{j}\binom{k+1}{j}.$$

**Trường hợp nửa-Pfaff.** Ta nói rằng $U$ là một miền có độ phức tạp bị chặn $\gamma$ với xích Pfaff $f = (f_1, \ldots, f_l)$ nếu tồn tại một hàm $g$ có bậc $\gamma$ trong xích $f$ sao cho các tập $\{g \geq \varepsilon\}$ có dạng một họ vét cạn của các tập con compact của $U$ với $\varepsilon \ll 1$. Ta gọi $g$ là một hàm vét cạn cho $U$.

Cho $A$ là một tập nửa-Pfaff $k$-chiều được định nghĩa bởi một xích Pfaff cố định $f = (f_1, \ldots, f_l)$ có bậc $\alpha$ trong một miền $U \subseteq \mathbb{R}^m$ với format $(m, l, \alpha, \beta, s)$, ở đây $U$ là một miền với độ phức tạp bị chặn $\gamma$ cho $f$. Sử dụng [Z, Remark.1.30, Th.2.25, Remark 2.26], và áp dụng Hệ quả 4.4.2, ta nhận được

$$\mathcal{H}^k(A \cap \mathbf{B}_r^m) \leq c(m,k)(4s+1)^d \mathcal{V}(m,l,\alpha,\beta^*,\gamma)\mathrm{V}ol_{\,k}(\mathbf{B}^k)r^k$$

ở đây

$$\mathcal{V}(m,l,\alpha,\beta^*,\gamma) = 2^{\frac{l(l-1)}{2}}\beta^*(\alpha+\beta^*-1)^{n-1}\frac{\gamma}{2}[n(\alpha+\beta^*-1)+\gamma+\min(m,l)\alpha]^l,$$

với $\beta^* = \max(\beta, \gamma)$.

## 4.5 Chặn đều cho độ đo Hausdorff của các thớ định nghĩa được

Cho $f : A \to \mathbb{R}^n$ là ánh xạ định nghĩa được, ở đây $A \subset \mathbb{R}^m$. Với mỗi $k \in \{0, \ldots, \dim A\}$, đặt

$$I_k(f) = \{y \in \mathbb{R}^n : \dim f^{-1}(y) \leq k\}.$$

Khi đó bởi Hệ quả 4.2.13 $(ii)$, $I_k(f)$ là định nghĩa được. Đặt

$$B_{0,m-k}(f) = \sup\{b_0(f^{-1}(y) \cap p^{-1}(w) \cap B^m(a,r)) : y \in I_k(f), p \in O^*(m,k),$$
$$w \in \mathbb{R}^k, a \in \mathbb{R}^m, r > 0\}.$$

Áp dụng Mệnh đề 4.3.1 với phép chiếu chính tắc

$$\{(x,y,p,w,a,r) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times O^*(m,k) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} :$$
$$x \in A, y \in I_k(f), f(x) = y, p(x) = w, \|x-a\| \leq r\}$$
$$\to \{(y,p,w,a,r) \in \mathbb{R}^n \times O^*(m,k) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}\},$$

ta nhận được tính bị chặn của $B_{0,m-k}(f)$. Khi $f$ là nửa đại số (tương ứng nửa-Pfaff), thì $B_{0,m-k}(f)$ bị chặn bởi một hằng số chỉ phụ thuộc vào "lược đồ" (tương ứng "format") của $f$.

**Định lý 4.5.1.** *Cho $f : A \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ liên tục định nghĩa được, ở đây $A$ là một tập con compact của $\mathbb{R}^m$. Khi đó với mỗi $k \in \{0, \dots, \dim A\}$, ta có*

$$\mathcal{H}^k(f^{-1}(y)) \leq c(m,k)B_{0,m-k}(f) \sup_{p \in O^*(m,k)} \mathcal{H}^k(p(A)), \text{ với mọi } y \in I_k(f).$$

*Đặc biệt, nếu $f$ là ánh xạ nửa đại số hoặc nửa-Pfaff, thì*

$$\mathcal{H}^k(f^{-1}(y)) \leq C_k \sup_{p \in O^*(m,k)} \mathcal{H}^k(p(A)), \text{ với mọi } y \in I_k(f),$$

*ở đây hằng số $C_k$ chỉ phụ thuộc vào "lược đồ" hoặc "format" của $f$.*

*Chứng minh.* Bởi Mệnh đề 4.2.12 và Hệ quả 4.2.13, với mỗi $p \in O^*(m,k)$ và $y \in I_k(f), \dim(f^{-1}(y) \cap p_\lambda^{-1}(w)) \leq 0$, với mọi $w \in \mathbb{R}^k$ bên ngoài một tập định nghĩa được có số chiều bé hơn $k$. Bởi công thức Cauchy-Crofton (4.1), khi $y \in I_k(f)$, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^k(f^{-1}(y)) &= c(m,k) \int_{O^*(m,k)} \int_{\mathbb{R}^k} \#(f^{-1}(y) \cap p^{-1}(w)) dw d\theta^*_{m,k} p \\
&\leq c(m,k)B_{0,m-k}(f) \int_{O^*(m,k)} \int_{\mathbb{R}^k} 1_{p(A)} dw d\theta^*_{m,k} p \\
&\leq c(m,k)B_{0,m-k}(f) \sup_{p \in O^*(m,k)} \mathcal{H}^k(p(A)).
\end{aligned}$$

Nếu $f$ là nửa đại số hoặc nửa-Pfaff, thì sử dụng chú ý trên ta nhận được kết quả cuối. □

**Hệ quả 4.5.2.** *Cho $f : A \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ liên tục định nghĩa được, ở đây $A \subset \mathbb{R}^m$. Khi đó với mỗi $k \in \{0, \dots, \dim A\}$ và với bất kỳ quả cầu $B_r^m$ có bán kính $r$ trong $\mathbb{R}^m$,*

$$\mathcal{H}^k(f^{-1}(y) \cap \mathbf{B}_r^m) \leq c(m,k)B_{0,m-k}(f)\, Vol_k(\mathbf{B}^k) r^k, \text{ với mọi } y \in I_k(f).$$

*Đặc biệt, nếu $f$ là ánh xạ nửa đại số hoặc nửa-Pfaff, thì*

$$\mathcal{H}^k(f^{-1}(y) \cap \mathbf{B}_r^m) \leq C_k r^k, \text{ với mọi } y \in I_k(f),$$

*ở đây hằng số $C_k$ chỉ phụ thuộc vào lược đồ hoặc format của $f$.*

**Ví dụ 4.5.3.** Cho $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbf{N}^m$. Xét họ các mặt đại số trong góc phần tư dương được xác định bởi các 'fewnomials' chỉ bao gồm các đơn thức $x^{\alpha_i}, i = 1, \ldots, q$:

$$A = \{(x,a) : x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m, a = (a_1, \ldots, a_q) \in \mathbb{R}^q,$$
$$x_1 > 0, \ldots, x_m > 0, \sum_{i=1}^{q} a_i x^{\alpha_i} = 0\}.$$

Giả sử $f$ là phép chiếu $(x,a) \mapsto a$ và $A_a = A \cap f^{-1}(a)$.

Khi $k = m-1$, và $\dim A_a \leq m-1$, từ Hệ quả 4.5.2 ta có các ước lượng sau:

Ước lượng 1. Từ $A_a$ là một tập nửa đại số có lược đồ $(m, 1, m+1, (1, \ldots, 1, d))$, với $d = \max_i |\alpha_i|$, sử dụng chặn trên Oleinik-Petrovskii-Thom-Milnor (xem [O-P], [Th], [M]), ta nhận được

$$\mathcal{H}^{m-1}(A_a \cap \mathbf{B}_r^m) \leq c(m, m-1) B_0(D(A_a)) \mathrm{Vol}_{m-1}(\mathbf{B}^{m-1}) r^{m-1},$$

ở đây $B_0(D(A_a)) \leq \frac{1}{2}(m+d)(m+d-1)^{m-1}$. (ngoài ra, xem [Ba-P-R2] cho một chặn trên tốt hơn).

Ước lượng 2. Sử dụng chặn trên Khovanskii [K, Ch.III Corollary 5], ta nhận được

$$\mathcal{H}^{m-1}(A_a \cap \mathbf{B}_r^m) \leq c(m, m-1) B_0(f) \mathrm{Vol}_{m-1}(\mathbf{B}^{m-1}) r^{m-1},$$

ở đây $B_0(f) \leq 2^{\frac{q(q-1)}{2}} (2m)^{m-1} (2m^2 - m + 1)^q$.

Họ $(C_p)_{p \in P}$ được gọi là một **họ định nghĩa được của các đường cong định nghĩa được** trong $B \subset \mathbb{R}^n$ nếu tồn tại một ánh xạ định nghĩa được $\gamma : P \times [0,1] \to B$, sao cho với mỗi $p \in P$, ánh xạ $\gamma_p : [0,1] \to B$, $t \mapsto \gamma(p,t)$, là liên tục, đơn ánh và $C_p = \gamma_p([0,1])$.

**Định lý 4.5.4.** *Cho $f : A \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ liên tục định nghĩa được, $A \subset \mathbb{R}^m$ là một tập compact, và $k \in \{0, \ldots, \dim A\}$. Khi đó với mỗi tập con compact định* *nghĩa được $B$ của $I_k(f)$ và họ định nghĩa được của các đường cong định nghĩa được $(C_p)_{p\in P}$ trong $\mathbb{R}^n$, tồn tại $\varphi \in \Phi^1$ sao cho*

$$\mathcal{H}^{k+1}(f^{-1}(C_p \cap B)) \leq \varphi^{-1}(\mathcal{H}^1(C_p)), \text{ với mọi } p \in P.$$

*Đặc biệt, nếu $f$ là nửa đại số, và $(C_p)_{p\in P}$ là họ nửa đại số của các đường cong nửa đại số, thì tồn tại $C, \alpha > 0$ để cho*

$$\mathcal{H}^{k+1}(f^{-1}(C_p \cap B)) \leq C(\mathcal{H}^1(C_p))^\alpha, \text{ với mọi } p \in P.$$

Trước hết ta có:

**Bổ đề 4.5.5.** *Cho $h : B \to \mathbb{R}^m$ là một ánh xạ liên tục định nghĩa được và $B$ là một tập con compact của $\mathbb{R}^n$. Khi đó tồn tại $\psi \in \Phi^1$ để cho*

$$\mathcal{H}^1(h(C_p \cap B)) \leq \psi^{-1}(\mathcal{H}^1(C_p)), \text{ với mọi } p \in P.$$

*Chứng minh Bổ đề.* Áp dụng Bổ đề 4.2.14 và Mệnh đề 4.2.15 về tính chất chặn đều với họ

$$(\{t \in [0,1] : \gamma_p \text{ không đơn điệu trong bất kỳ lân cận nào của } t\})_{p\in P},$$

ta có $\psi_1 \in \Phi^1$ để cho

$$\mathcal{H}^1(h(C_p)) \leq \psi_1^{-1}(\mathcal{H}^1(C_p)), \text{ với mọi } p \in P.$$

Với một họ các đường cong định nghĩa được trong $\mathbb{R}^n$, số thành phần liên thông của $C_p \cap B$ bị chặn đều bởi $M$, với mọi $p \in P$. Do vậy, ký hiệu các thành phần liên thông của $C_p \cap B$ bởi $C_{p,i}$ và áp dụng trường hợp trên, ta nhận được

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(h(C_p \cap B)) &\leq \textstyle\sum_i \mathcal{H}^1(h(C_{p,i})) \leq \sum_i \psi_1^{-1}(\mathcal{H}^1(C_{p,i})) \\ &\leq M\psi_1^{-1}(\mathcal{H}^1(C_p)) \leq \psi^{-1}(\mathcal{H}^1(C_p)), \text{ với mọi } p \in P, \end{aligned}$$

ở đây $\psi \in \Phi^1$, $\psi(t) = \psi_1(t/M)$. □

*Chứng minh Định lý 4.5.4.* Chứng minh của định lý dựa theo [H, Theorem 5].
Với $k = 0$: Từ $B$ là compact và các thớ của $f$ trên $B$ là hữu hạn, bởi sự tầm thường

hóa định nghĩa được (Định nghĩa 4.2.21, Định lý 4.2.22), $f^{-1}(B) = \cup_{j=1}^{J} A_j$, ở đây $A_j$ là một tập compact định nghĩa được, và $f|_{A_j}$ là đơn ánh. Với mỗi $j \in \{1, \ldots, J\}$, áp dụng Bổ đề với $(f|_{A_j})^{-1}$, ta nhận được $\psi_j \in \Phi^1$, sao cho

$$\mathcal{H}^1((f|_{A_j})^{-1}(C_p \cap B)) \ \leq \psi_j^{-1}(\mathcal{H}^1(C_p)), \quad \text{với mọi } p \in P.$$

Cho nên

$$\mathcal{H}^1(f^{-1}(C_p \cap B)) \ \leq \ \sum_j \varphi_j^{-1}(\mathcal{H}^1(C_p)) \ \leq \ \varphi^{-1}(\mathcal{H}^1(C_p)), \quad \text{với mọi } p \in P,$$

ở đây $\varphi \in \Phi^1$ với $\varphi^{-1} \geq \sum_{j=1}^{J} \varphi_j^{-1}$.

Với $k \geq 1$: cho $G_k(\mathbb{R}^m)$ ký hiệu là không gian con Grassmannian tuyến tính $k$-chiều của $\mathbb{R}^m$. Định nghĩa

$$\operatorname{dist}(L, L') = \sup\{d(x, L') : x \in L, \|x\| = 1\}, \text{ với } L \in G_k(\mathbb{R}^m), L' \in G_l(\mathbb{R}^m).$$

Cho $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ là phép chiếu chính tắc. Chọn một tập con hữu hạn $I$ của $O(m)$ và $\delta > 0$, sao cho với mỗi $L \in G_k(\mathbb{R}^m)$, tồn tại $g \in I$ để cho

$$\operatorname{dist}(L, (\pi \circ g)^{-1}(0)) > \delta.$$

Áp dụng các kết quả về phân tầng định nghĩa được, Định nghĩa 4.2.17, 4.2.18 và Định lý 4.2.20, ta có thể chọn một phép phân tầng $\mathcal{S}$ của $A$ thỏa điều kiện Whitney (a), sao cho với mỗi $S \in \mathcal{S}$, $\operatorname{rank} f|_S$ là hằng số và hoặc $f(S) \subset I_k(f)$ hoặc $f(S) \cap I_k(f) = \emptyset$. Đặt $\mathcal{J} = \{S \in \mathcal{S} : \dim S - \operatorname{rank} f|_S = k\}$. Ta có thể làm mịn phân tầng đó sao cho với mỗi $g \in I$ và $T \in \mathcal{J}$, hàm định nghĩa được

$$d(T, g)(x) = \operatorname{dist}(T_x T \cap f^{-1}(f(x)), (\pi \circ g)^{-1}(0)) - \delta$$

có dấu không đổi trên $T$.

Với mỗi $S \in \mathcal{S} \backslash \mathcal{J}$ ta có $\dim(S \cap f^{-1}(y)) \leq k - 1$ với mọi $y \in I_k(f)$, do vậy, $\mathcal{H}^{k+1}(f^{-1}(C_p \cap I_k(f)) \backslash \cup_{T \in \mathcal{J}} T) = 0$ khi $p \in P$.

Với mỗi $T \in \mathcal{J}$, tồn tại $g_T \in I$ sao cho $d(T, g_T)$ dương trên $T$. Do đó, bởi điều kiện

Whitney (a), $\dim(f^{-1}(y)\cap(\pi\circ g_T)^{-1}(w)\cap \mathrm{cl}(T))\leq 0$, với mỗi $y\in I_k(f), w\in\mathbb{R}^k$. Với mỗi $g\in I$, đặt $A_g=\cup\{\mathrm{cl}(T): T\in\mathcal{J}, g_T=g\}$. Sử dụng công thức co-area và áp dụng trường hợp $k=0$ với $A:=A_g$, $f:=(f,\pi\circ g)|_{A_g}$, và $((C_p\times w))_{(p,w)\in P\times\mathbb{R}^k}$ cho họ các đường cong, ta nhận được

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{k+1}(f^{-1}(C_p\cap B)) &\leq \sum_{g\in I}\mathcal{H}^{k+1}\left(g(A_g\cap f^{-1}(C_p\cap B))\right)\\
&= \sum_{g\in I}\int_{g(A_g\cap f^{-1}(C_p\cap B))} d\mathcal{H}^{k+1}\\
&= \sum_{g\in I}\int \mathcal{H}^1\left(g(A_g\cap f^{-1}(C_p\cap B))\cap\pi^{-1}(w)\right)dw\\
&= \sum_{g\in I}\int \mathcal{H}^1\left((A_g\cap f^{-1}(C_p\cap B))\cap g^{-1}(\pi^{-1}(w))\right)dw\\
&= \sum_{g\in I}\int \mathcal{H}^1\left(A_g\cap(f,\pi\circ g)^{-1}[(C_p\times w)\cap(B\times\pi(g(A)))]\right)dw\\
&\leq \sum_{g\in I}\int 1_{\pi\circ g(A)}\varphi^{-1}(\mathcal{H}^1(C_p))dw\\
&\leq \sum_{g\in I}\mathcal{H}^k(\pi\circ g(A))\,\varphi^{-1}\left(\mathcal{H}^1(C_p)\right)\\
&\leq \bar{\varphi}^{-1}\left(\mathcal{H}^1(C_p)\right)\ , \text{ for all } p\in P,
\end{aligned}$$

ở đây $\bar\varphi\in\Phi^1$ có dạng $\bar\varphi(t)=\varphi(t/K)$.

Nếu $f$ là ánh xạ nửa đại số, thì bởi bất đẳng thức Łojasiewicz $\varphi$ có dạng $\varphi^{-1}(y)=C\|y\|^\alpha$. □

**Ví dụ 4.5.6.**

a) Áp dụng Định lý 4.5.4 với họ của các đoạn thẳng, ta nhận được $\varphi\in\Phi^1$, sao cho

$$\mathcal{H}^{k+1}\left(f^{-1}([y,z])\cap B\right)\leq\varphi^{-1}(\|y-z\|),\ \text{khi } y,z\in\mathbb{R}^n.$$

Đặc biệt, nếu $f$ là ánh xạ nửa đại số hoặc nửa-Pfaff, thì tồn tại $C,\alpha>0$ để cho

$$\mathcal{H}^{k+1}\left(f^{-1}([y,z])\cap B\right)\leq C\|y-z\|^\alpha.$$

b) Tổng quát, với trường hợp nửa đại số, không thể chọn $C$ chỉ phụ thuộc vào lược đồ của $f$, hoặc $\alpha=1$ trong ước lượng của định lý trước, chẳng hạn, cho trường hợp $f_k(x)=kx^n$ với $n\geq 2, k>0$, $\mathcal{H}^1(f_k^{-1}([0,y]))=\dfrac{1}{\sqrt[n]{k}}\sqrt[n]{y}$, với mọi $y>0$.

c) Cho $f(x) = e^{-\frac{1}{|x|}}$. Khi đó $f$ là định nghĩa được trong cấu trúc o-tối tiểu $\mathbb{R}_{exp}$, và $f^{-1}([0, y]) = [0, -\dfrac{1}{\ln|y|}]$. Từ $\dfrac{1}{y^\alpha \ln|y|} \to \infty$, khi $y \to 0$, không tồn tại $C > 0$ và $\alpha > 0$ để cho $\mathcal{H}^1(f^{-1}([0, y])) \leq C|y|^\alpha$ với mọi $y \in [0, 1]$.

## 4.6 Định lý Morse-Sard trong cấu trúc o-tối tiểu

**Định lý 4.6.1.** *Cho $f : A \to \mathbb{R}^n$ là một ánh xạ định nghĩa được. Giả sử $A = \cup_{i\in I} C_i$ là hợp hữu hạn của các đa tạp định nghĩa được $C_i$ thuộc lớp $C^1$, sao cho ánh xạ hạn chế $f|_{C_i}$ thuộc lớp $C^1$. Với mỗi $s \in \mathbf{N}$ và $i \in I$, đặt*

$$\Sigma_s(f, C_i) = \{x \in C_i : rank\ df|_{C_i}(x) < s\} \text{ và } \Sigma_s(f, A) = \bigcup_{i\in I} \Sigma_s(f, C_i).$$

*Khi đó $C_s(f, A) = f(\Sigma_s(f, A))$ là tập định nghĩa được có chiều $< s$. Đặc biệt, $\mathcal{H}^s(C_s(f, A)) = 0$.*

*Chứng minh.* ([L3, Theorem 1]).
Ta có $\Sigma_s(f, C_i)$ là định nghĩa được, nên $\bigcup_{i\in I} \Sigma_s(f, C_i)$ cũng là định nghĩa được. Do vậy, bởi Bổ đề 4.2.10 ta nhận được $C_s(f, A) = f(\Sigma_s(f, A))$ là định nghĩa được.

Giả sử rằng $\dim C_s(f, A) \geq s$. Theo Định lý 4.2.16, tồn tại một tập con định nghĩa được $U$ của $C_s(f, A)$ và một ánh xạ định nghĩa được lớp $C^1$ $s : U \to \Sigma_s(f, A)$ sao cho $f \circ s = \mathrm{id}_U$. Như vậy

$$\mathrm{rank} df(s(y))ds(y) \geq s, \text{ với mọi } y \in U.$$

Do đó

$$\mathrm{rank} df(x) \geq s, \text{ với mọi } x \in s(U).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết của Định lý. Vậy

$$\dim C_s(f, A) < s,$$

và do đó

$$\mathcal{H}^s(C_s(f, A)) = 0.$$

□

**Nhận xét 4.6.2.** Một tập thuộc phạm trù hình học giải tích $\mathcal{C}$ được gọi là $\mathcal{C}-$**tập**, và có tính chất là hữu hạn thành phần liên thông địa phương. Hơn hữa, theo [D-M, S.3], các phạm trù hình học giải tích tương ứng với các cấu trúc o-tối tiểu trên trường của các số thực với các hàm giải tích hạn chế $\mathbb{R}_{\text{an}} := (\mathbb{R}, +, \cdot, (f))$: từ một phạm trù hình học giải tích $\mathcal{C}$, ta nhận được một cấu trúc o-tối tiểu $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{C})$ trên $\mathbb{R}_{\text{an}}$ bởi định nghĩa

$$\mathcal{D}_n = \mathcal{D}(\mathcal{C})_n := \{X \subseteq \mathbb{R}^n : X \in \mathcal{C}(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}))\},$$

ở đây ta đồng nhất đa tạp giải tích $\mathbb{R}^n$ với một tập con mở của không gian xạ ảnh $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ bằng phép nhúng

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (1 : y_1 : \cdots : y_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R}).$$

Do vậy, các kết quả trong chương này vẫn còn đúng cho các tập thuần (xem định nghĩa ở [D-M], [S], [T]) với biến đổi từ toàn cục đến địa phương.

Bằng việc áp dụng các Định lý 4.4.1 và 4.5.1, có thể nhận được một ước lượng tường minh cho trường hợp sub-Pfaff (xem [G-V-Z]).

### Kết luận của Chương 4

Các kết quả chính của chương này bao gồm:

- Chặn đều cho các số Betti của các thớ định nghĩa được (Mệnh đề 4.3.1).

- Chặn trên cho độ đo Hausdorff của các tập định nghĩa được (Định lý 4.4.1).

- Chặn trên cho độ đo Hausdorff của các thớ định nghĩa được (Định lý 4.5.1).

- Chặn trên cho độ đo Hausdorff của nghịch ảnh qua ánh xạ định nghĩa được của một họ các đường cong định nghĩa được (Định lý 4.5.4).

# KẾT LUẬN

Các kết quả chính của luận án này bao gồm:

1. Dựa trên kết quả của F. H. Clarke về định lý hàm ngược cho ánh xạ Lipschitz, luận án đưa ra định lý hàm ngược định lượng cho ánh xạ Lipchitz (Định lý 1.3.1), chứng minh định lý hàm ẩn định lượng cho ánh xạ Lipschitz (Định lý 1.4.2). Ngoài ra, luận án cũng chứng minh được rằng: Nếu $f_0$ là một ánh xạ Lipschtz thỏa định lý hàm ngược Clarke thì nhiễu $f_0$ bởi một ánh xạ Lipschitz $h$ với hằng số Lipschitz thích hợp thì ánh xạ thu được $f = f_0 + h$ cũng thỏa định lý hàm ngược Clarke (Định lý 1.5.1).

2. Áp dụng các kết quả về Đại số tuyến tính, luận án chứng minh Bổ đề Morse định lượng (Bổ đề 2.3.1). Từ đó áp dụng định lý Sard định lượng và định lý hàm ngược định lượng cho ánh xạ Lipschitz, luận án đưa ra một chứng minh chi tiết cho định lý Morse định lượng được phát biểu bởi Y. Yomdin (2005) (Định lý 2.5.1).

3. Áp dụng một số kết quả và kỹ thuật chứng minh của Hình học đại số thực, luận án đưa ra một đánh giá chặn trên cho các số Betti của tập nửa đại số cơ sở (Định lý 3.3.1) và chặn trên cho tổng các số Betti (Hệ quả 3.3.2).

4. Các đối tượng trong cấu trúc o-tối tiểu có tính chất hữu hạn thành phần liên thông, do đó áp dụng phương pháp tích phân hình học cho phép ta ước lượng dộ đo Hausdorff của các tập thông qua số thành phần liên thông của giao các tập đó với các không gian affin tổng quát có chiều thích hợp. Luận án đưa ra

chặn đều cho các số Betti của các thớ định nghĩa được (Mệnh đề 4.3.1). Từ đó đưa ra các đánh giá: Chặn trên cho độ đo Hausdorff của các tập định nghĩa được (Định lý 4.4.1); Chặn trên cho độ đo Hausdorff của các thớ định nghĩa được (Định lý 4.5.1) và chặn trên cho độ đo Hausdorff của nghịch ảnh qua ánh xạ định nghĩa được của một họ các đường cong định nghĩa được (Định lý 4.5.4).

Hơn nữa, luận án cũng đưa ra một số ví dụ tường minh ở các chương 1, 3 và 4.

Luận án có thể tiếp tục nghiên cứu về dạng định lượng của các định lý: Định lý hàm ngược cho các ánh xạ giải tích; Định lý chuẩn bị Weierstrass; Định lý hạng hằng.

# CÁC CÔNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN LUẬN ÁN

[1] Ta Le Loi and Phan Phien, *Bound of Hausdorff measurse of tame sets*, (Submitted 2010). Proceedings of the International Conference on Topology, Geometry, Algebra & Arithmetics, University of Dalat, December 22-24, 2008, (2009), pp. 156-169.

[2] Phan Phien, *Betti numbers and Hausdorff measures of basic semi-algebraic sets,* Journal of Science University of Dalat, Volume 1 (2011), pp. 13-22. (Vietnamese)

[3] Phan Phien, *Some quantitative results on Lipschitz inverse and implicit function theorems,* East-West Journal of Mathematics, Vol. 13, No 1 (2011), pp. 7-22.

[4] Ta Le Loi and Phan Phien, *The Quantitative Morse theorem,* International Journal of Mathematical Analysis, Vol. 6, no. 10 (2012), pp. 481-491.

# Tài liệu tham khảo


**Tiếng Việt**

[L] T. L. Loi (2007), Hình học đại số thực, Giáo trình cao học - Đại học Đà Lạt.

**Tiếng Anh**

[B-R] R. Benedetti and J. J. Risler (1990), Real algebraic and semi-algebraic sets. Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics] Hermann, Paris, 340 pp.

[Ba1] S. Basu (1999), "On bounding the Betti numbers and computing the Euler characterstic of semi-algebraic sets", Discrete and Computational Geometry, 22, pp. 1-18.

[Ba2] S. Basu (2003), "Different Bounds on the Different Betti Numbers of Semi-Algebraic Sets", Discrete and Computational Geometry, 30, No. 1, pp. 64-85.

[Ba-K] S. Basu and M. Kettner (2008), "A sharper estimate on the Betti number of sets defined by quadratic inequalities", Discrete and Computational Geometry 39, No. 4, pp. 734-746.

[Ba-P-R] S. Basu, R. Pollack, M-F. Roy (2003), Algorithms in real algebraic geometry, Spinger-Verlag, 2003.

[Ba-P-R2] S. Basu, R. Pollack, and M-F. Roy (2009), "An asymtotically tight bound on the number of semi-algebraically connected components of realzable sign conditions", available at arXiv: math/0603256v3, 24 pages.

[B-C-R] J. Bochnak, M. Coste, M. F. Roy (1998), Real algebraic geometry, Spinger-Verlag.

[B-L-R] R. Benedetti, F. Loeser, J. J. Risler (1991), "Bounding the number of connected components of a real algebraic set", Discrete and Computational Geometry, 6, pp. 191-209.

[C] F. H. Croom (1978), Basic Concepts of Algebraic Topology, Springer-Verlag.

[Co] M. Coste (2000), An Introduction to O-minimal Geometry, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Pisa. Instituti Editoriali e Poligrafici Internazionali.

[C1] F. H. Clarke (1976), "On the inverse function theorem", Pacific Journal of Mathematics, Vol 64, No 1, pp. 97-102.

[C2] F. H. Clarke (1975), "Generalized gradients and applications", Trans. Amer. Math. Soc., Vol 205, pp. 247-262.

[C-L-S-W] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern and P. R. Wolenski (1998), Nonsmooth Analysis and Control Theory, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York.

[D1] L.van den Dries (1997), Tame Topology and O-minimal Structures, LMS Lecture Notes, Cambridge University Press.

[D2] L. van den Dries (2005), "Limit sets o-minimal structures", Proceedings of the RAAG summer school, Lisbon 2003: O-minimal structures, pp. 172-215.

[D-K] D. D'Acunto and K. Kurdyka (2006), "Bounds for gradient trajectories and geodesic diameter of real algebraic sets", Bull. London Math. Soc. 38, No. 6, pp. 951-965.

[D-M] L. van den Dries and C. Miller (1996), "Geometric Categories and O-minimal Structures", Duke Math. J. 84, No 2, pp. 497-540.

[D'Ac-Kur] D. D'Acunto and K. Kurdyka (Preprint 2003), "Bound for gradients trajectories of definable functions with applications to robotics and semialgebraic geometry".

[E] H. Edelsbnenner (2006), "Computational Topology - Section IV.2 Homology", http://www.cs.duke.edu/course/fall06/cps296.1,, pp. 81-87.

[F] H. Federer (1969), Geometric measures theory, Springer-Verlag.

[F-K-P] T. Fukui, K. Kurdyka, and L. Paunescu (2010), "Tame Nonsmooth Inverse Mapping Theorems", SIAM Journal On Optimation. Volume 20, ISSue 3, pp. 1573-1590.

[F-R] A. Fornasiero and E. Vasquez Rifo (Version 3.6) (Nov 2010), "Hausdorff measurse on o-minimal structures", arXiv: 1011.1629v1, 22 pages.

[Go] M. S. Gowda (2004), "Inverse and Implicit Function Theorems for H-Differeniable and Semismooth Functions", Optimization Methods and Software, Vol. 19, pp. 443-461.

[Gu-J] O. Gutú and J. A. Jaramillo (2007), "Global homeomorphisms and covering projections on metric spaces", Math. Ann., 338, pp. 75-95.

[G-L] G. H. Golub and C. F. van Loan (1983), Matrix computation, Johns Hopkins Univ.

[G-V] A. Gabrielov and N. Vorbjov (1997), "Betti numbers of semi-algebraic sets defined by quantifier-free formulae", Discrete Comput Geom 33, pp. 395-401.

[G-V-Z] A. Gabrielov, N. Vorobjov and T. Zell (2004), "Betti numbers of semialgebraic sub-Pfaffian sets", J. London Math. Soc. (2) 69, pp. 27-43.

[H] R. M. Hardt (1983), "Some analytic bounds for subanalytic sets", Differential geometric control theory (Houghton, Mich, 1982), pp 259-267, Progr. Math. 27, Birkhauser Boston, Boston, Mass.

[Ha] J. Hadamard (1906), "Sur les transformations ponctuelles", Bull. Soc. Math. Fr. 34, 71-84.

[Hat] A. Hatcher (2002), Algebraic topology, Cambridge University Press.

[He] P. Henrici (1988), Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 1, Wiley, New York.

[Hir] M. W. Hirsch (1976), Differential Topology, Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin.

[K] A. G. Khovanski (1991), Fewnomials, Translations of mathematical monographs 88, AMS, Providence, RI.

[K-O-S] K. Kurdyka, P. Orro and S. Simon (2000), "Semialgebraic Sard Theorem For Generalized Critical Values", J. Differential Geometry, 56, pp. 67-92.

[L1] T. L. Loi (2003), "Tame topology and Tarski-type systems", Vietnam J. Math. 31:2, pp. 127-136.

[L2] T. L. Loi (2002), "Stratification of families of functions definable in o-minimal structures", Acta Math. Vietnam, Vol. 27, 2, pp. 239-244.

[L3] T. L. Loi (2008), "Transversality theorem in o-minimal structures", Compositio Math, 144, pp. 1227-1234.

[M] J. Milnor (1964), "On the Betti numbers of real varieties", Proc.Amer.Math.Soc. 15, pp. 275-280.

[Morse] M. Morse (1931), "The critical points of a function of $n$ variables", Trans. Amer. Math. Soc., 33, no. 1, pp. 71-91.

[N] L. Niederman (2007), "Prevalence of exponential stability among nearly intergrable Hamiltonian systems", Ergodic Theory and Dynamical Systems, 25p.

[O-P] O. A. Oleinik and I. G. Petrovskii (1949), "On the topology of real algebraic hypersurfaces", Izv.Acad.Nauk SSSR 13, pp. 389-402.

[PA] M. Papi (2005), “On the domain of the implicit function and applications”, Journal of Inequalities and Applications, 3, pp. 221-234.

[R] P. J. Rabier (1997), “Ehresmann fibrations and Palais-Smale conditions for morphisms of Finsler manifors”, Annals of Mathematics, 146, pp. 647-691.

[Roh] A. Rohde (1997), ”On Sard’s theorem for nonsmooth functions”, Numer. Funct. Anal. Optim. 18, n. 9-10, pp. 1023-1039.

[S] M. Shiota (1997), Geometry of Subanalytic and Semialgebraic Sets, Progress in Math., Vol. 150, Birkhäuser, Boston.

[Sa] A. Sard (1942), ”The measure of the critical values of differentiable maps”, Bull. Amer. Math. Soc. 48, pp. 883-890.

[SL] Serge Lang (1996), Analysis II, Columbia University.

[T] B. Tessier (1997), “Tame and stratified objects”, Geometric Galois Actions, 1. Around Grothendieck’s esquisse d’un programme. London. Math. Soc. Lecture Note Series 242, pp. 231-242.

[Th] R. Thom (1965), “Sur l’homologie des variétés algébriques réelles”, Differential and combinatorial topology, Princeton Univ. Press, Princeton, pp. 255-265.

[V] V. A. Vassiliev (2001), Introduction to Topology, AMS.

[W] A. J. Wilkie (1999), “A Theorem of The Complement and Some New O-minimal Structures”, Sel. Math. , New ser. 51, pp. 397-421.

[We] N. Weaver (1999), Lipschitz Algebras, Uto-Print Singapore.

[Wh] H. Whitney (1935), “A Function not Constant on Connected Set of Critical Points”, Duke Math.J. 1, pp. 514-517.

[Y1] Y. Yomdin (2005), “Some quantitative results in singularity theory”, Anales Polonici Mathematici, 37, pp. 277-299.

[Y2] Y. Yomdin (1987), “Metric properties of semialgebraic sets and mappings and their applications in smooth analysis”, (Proceedings of the Second International Conference on Algebraic Geometry, La Rabida, Spain, 1984, J.M. Aroca, T. Sahcez-Geralda, J.L. Vicente, eds.), Travaux en Course, Hermann, Paris, pp. 165-183.

[Y3] Y. Yomdin (1983), ”The Geometry of Critical and Near-Critical Values of Differentiable Mappings”, Math. Ann. 264, pp. 495-515.

[Y4] Y. Yomdin (1990), ”Sard’s Theorem and Its Improved Versions in Numerical Analysis”, Lectures in Applied Mathematics, Volume 26, pp. 701-706.

[Y-C] Y. Yomdin and G. Comte (2004), Tame geometry with application in smooth analysis, LNM vol. 1834.

[Z] T. Zell (2003), Quantitative study of semi-Pfaffian sets, PhD thesis, School of Mathematics, Georgia Institue of Technology.