Lời cam đoan

Các kết quả trình bày trong luận án là công trình nghiên cứu của tôi được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của GS.TSKH. Lê Dũng Mưu; TS. Lê Minh Lưu đã có những ý kiến đóng góp sũa chữa luận án. Các kết quả trong luận án là mới và chưa từng được công bố trong các công trình của người khác.

Tôi xin chịu trách nhiệm với những lời cam đoan của mình.

Tác giả

Phạm Gia Hưng

Lời cám ơn

Luận án này được hoàn thành tại Trường Đại học Đà Lạt và Viện Toán học thuộc Viện Khoa học & Công nghệ Việt Nam dưới sự hướng dẫn tận tình của GS.TSKH. Lê Dũng Mưu; TS. Lê Minh Lưu đã có những ý kiến đóng góp sữa chữa luận án. Tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới các Thầy!

Trong quá trình học tập và nghiên cứu, thông qua các bài giảng, hội nghị và seminar, tác giả luôn nhận được sự quan tâm giúp đỡ cũng như có được những ý kiến đóng góp quý báu của các Thầy Cô ở Trường Đại học Đà Lạt và Viện Toán học. Tác giả xin chân thành cám ơn!

Tác giả xin trân trọng cám ơn Ban lãnh đạo Trường Đại học Đà Lạt, Phòng Đào tạo ĐH & SĐH, Khoa SĐH - Trường Đại học Đà Lạt; Ban lãnh đạo của Viện Toán học; Ban lãnh đạo Trường Đại học Nha Trang, Khoa KHCB, Khoa CNTT - Trường Đại học Nha Trang; đã tạo mọi điều kiện thuận lợi cho tác giả trong thời gian làm nghiên cứu sinh!

Xin được cám ơn anh chị em cùng nhóm nghiên cứu, bạn bè và đồng nghiệp gần xa đã trao đổi, động viên và khích lệ tác giả trong suốt quá trình học tập, nghiên cứu và làm luận án!

Tác giả xin kính tặng những người thân yêu trong gia đình của mình niềm vinh hạnh to lớn này!

Mục lục

Một số ký hiệu và chữ viết tắt

$\mathbb{N}$	tập số nguyên dương
$\mathbb{R}$	tập số thực
$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$	tập số thực mở rộng
$\mathbb{R}^n$	không gian Euclide n chiều
$\mathbb{R}^n_+$	góc không âm của $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{H}$	không gian Hilbert thực
X^*	không gian đối ngẫu của không gian X
A^T	chuyển vị của ma trận A
$\langle x, y\rangle = x^T y$	tích vô hướng của hai vector x và y
$\\|x\\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$	chuẩn của vector x
I	ánh xạ đồng nhất
f^{-1}	ánh xạ ngược của ánh xạ f
$f^{-1}(V)$	nghịch ảnh của tập V qua ánh xạ f
$domf$	miền hữu hiệu của ánh xạ f
$rgef$	miền ảnh của ánh xạ f
$gphf$	đồ thị của ánh xạ f
$epif$	trên đồ thị của ánh xạ f
$f'(x) := \nabla f(x)$	đạo hàm của f tại x
$f'(x, d)$	đạo hàm theo phương d của f tại x
$\partial f(x)$	dưới vi phân của f tại x
$\min\{f(x) : x \in D\}$	giá trị cực tiểu của f trên tập D
$\max\{f(x) : x \in D\}$	giá trị cực đại của f trên tập D
$argmin\{f(x) : x \in D\}$	tập các điểm cực tiểu của f trên tập D

$argmax\{f(x) : x \in D\}$	tập các điểm cực đại của f trên tập D
clD	bao đóng của tập D
$intD$	phần trong của tập D
riD	phần trong tương đối của tập D
$d_D(x)$	khoảng cách từ x đến tập D
$p_D(x)$	hình chiếu của x trên tập D
$N_D(x)$	nón pháp tuyến của tập D tại x
$diamD := \sup\limits_{x,y \in D} \|x - y\|$	đường kính của của tập D
$\overline{B}(a, r)$	quả cầu đóng tâm a bán kính r
$S(a, r)$	mặt cầu tâm a bán kính r
$x^k \to x$	dãy x^k hội tụ mạnh tới x
$x^k \rightharpoonup x$	dãy x^k hội tụ yếu tới x
$\overline{\lim} := \limsup$	giới hạn trên
$\underline{\lim} := \liminf$	giới hạn dưới
VI	bất đẳng thức biến phân (đơn trị)
MVI	bất đẳng thức biến phân đa trị
P^d	bài toán đối ngẫu của bài toán P
SP	tập nghiệm của bài toán P
SP_δ	tập $\delta-$ nghiệm của bài toán P
$BTCB$	bài toán cân bằng

Mở đầu

Cho $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert thực, $K \subseteq \mathcal{H}$ là tập lồi đóng khác rỗng và $f : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm cân bằng, tức là f thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in K$. Xét bài toán

$$E(K, f): \text{ Tìm } x \in K \text{ sao cho } f(x, y) \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Bài toán này xuất hiện lần đầu tiên vào năm 1972 trên một bài báo có tựa đề "A Minimax Inequality and Its Applications" [19]. Tác giả của bài báo là Ky Fan[1], ông đã có nhiều đóng góp quan trọng cho bài toán nên bài toán được gọi là Bất đẳng thức Ky Fan (*Ky Fan Inequality*).

Bài toán $E(K, f)$ tương đương với định lý điểm bất động Brouwer nhưng tiện dụng hơn nhiều, nó thường được sử dụng để thiết lập điểm cân bằng trong Lý thuyết trò chơi (*Games Theory*), bởi thế nó còn có tên gọi khác là Bài toán cân bằng (*Equilibrium Problem*, viết tắt là BTCB) theo cách gọi của L.D. Muu và W. Oettli [37].

Về mặt hình thức BTCB khá đơn giản nhưng nó bao hàm được nhiều lớp bài toán quan trọng thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động Kakutani, điểm yên ngựa, cân bằng Nash, v.v... [8, 21, 37]; nó hợp nhất các bài toán này theo một phương pháp nghiên cứu chung rất tiện lợi. Nhiều kết quả của các bài toán nói trên có thể mở rộng cho BTCB tổng quát với những điều chỉnh phù hợp và do vậy thu được nhiều ứng dụng rộng lớn [9, 24, 25, 33, 34, 43]. Các nhà nghiên cứu cũng đã chỉ ra rằng, nhiều bài toán thực tế như tối ưu, kinh tế và kỹ thuật có thể mô tả được dưới dạng BTCB [8, 38, 39]. Điều đó đã giải thích được vì sao BTCB ngày càng được nhiều người quan tâm.

[1]Ky Fan (19/09/1914 – 22/03/2010) là nhà toán học Mỹ gốc Hoa, giáo sư danh dự trường Đại học California, Santa Barbara.

Các hướng nghiên cứu đang được chú trọng đối với BTCB là: nghiên cứu những vấn đề định tính như sự tồn tại nghiệm, cấu trúc tập nghiệm, tính ổn định [6, 8, 23, 28, 36, 52] và định lượng như phương pháp giải, tính hội tụ [8, 21, 24, 27, 33, 34, 39, 41, 42, 43]; ứng dụng bài toán này vào trong thực tế, đặc biệt vào các mô hình kinh tế [38, 39]. Trong việc nghiên cứu những vấn đề này, các phương pháp giải đóng một vai trò rất quan trọng. Đến nay đã có một số kết quả đạt được cho một số lớp BTCB với các giả thiết lồi và đơn điệu, trong đó chủ yếu sử dụng phương pháp điểm gần kề (*proximal point method*), phương pháp nguyên lý bài toán phụ (*auxiliary subproblem principle method*), phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov (*Tikhonov regularization method*), phương pháp điểm trong (*interior point method*) và đặc biệt là các phương pháp chiếu (*projection methods*).

Bài toán $E(K, f)$, khi hàm f không có tính đơn điệu mạnh, nói chung là bài toán đặt không chỉnh (*ill-posed problem*) theo nghĩa bài toán không duy nhất nghiệm hoặc nghiệm của nó không ổn định theo dữ kiện ban đầu, tức là một thay đổi nhỏ của các dữ liệu có thể dẫn đến sự sai khác rất lớn của nghiệm, thậm chí làm cho bài toán trở nên vô nghiệm hoặc vô định. Nhiều vấn đề khoa học, công nghệ, kinh tế, sinh thái, v.v... gặp phải các bài toán thuộc loại này.

Do các số liệu thường được thu thập bằng thực nghiệm và sau đó lại được xử lý trên máy tính nên chúng không tránh khỏi có sai số. Chính vì thế, ta cần phải có những phương pháp giải ổn định các bài toán đặt không chỉnh sao cho khi sai số của dữ liệu càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát. Hiệu chỉnh là một trong những kỹ thuật quan trọng tạo nên các phương pháp giải ổn định, nó thường được dùng để giải những bài toán đặt không chỉnh trong toán học ứng dụng như tối ưu lồi, bất đẳng thức biến phân, v.v... Các phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề là những phương pháp thường hay được sử dụng. Ý tưởng chính của các phương pháp này là: xây dựng các bài toán hiệu chỉnh bằng cách cộng vào toán tử của bài toán gốc một toán tử đơn điệu mạnh phụ thuộc vào tham số sao cho bài toán hiệu chỉnh có nghiệm duy nhất. Khi đó, nghiệm của bài toán gốc là giới hạn của dãy lặp, nhận được bằng cách giải các bài toán hiệu chỉnh, khi cho tham số dần tới một điểm giới hạn thích hợp.

Những người có công đặt nền móng cho lý thuyết các bài toán đặt không chỉnh là A.N. Tikhonov [48, 49], M.M. Lavran-t'ev [30], V.K. Ivanov [22],... Do tầm quan trọng đặc biệt của lý thuyết này mà nhiều nhà toán học nước ngoài như Ya.I. Alber, K.E. Atkinson, A.B. Bakushinskii, J. Baumeiser, H.W. Engl, F. Gilbert, .. và trong nước như Đặng Đình Áng, Phạm Kỳ Anh, Lâm Quốc Anh, Nguyễn Bường, Đinh Nho Hào, Phan Quốc Khánh, Lê Minh Lưu, Lê Dũng Mưu, Phạm Hữu Sách, Nguyễn Năng Tâm, Nguyễn Xuân Tấn, Đặng Đức Trọng, Nguyễn Đông Yên,... cùng với các đồng sự đã dành nhiều công sức của mình cho việc nghiên cứu các phương pháp giải bài toán đặt không chỉnh.

Năm 1963, A.N. Tikhonov[2] đưa ra phương pháp hiệu chỉnh nổi tiếng và kể từ đó lý thuyết các bài toán đặt không chỉnh phát triển một cách nhanh chóng và có mặt ở hầu hết các bài toán trong thực tế. Nội dung chủ yếu của phương pháp này là xây dựng nghiệm hiệu chỉnh cho phương trình toán tử

$$A(x) = b$$

trong không gian Hilbert thực dựa trên việc tìm phần tử cực tiểu x_ε^δ của phiếm hàm

$$F_\varepsilon^\delta(x) := \|A(x) - b_\delta\|^2 + \varepsilon\|x - x^g\|^2,$$

trong đó $\varepsilon > 0$ là tham số hiệu chỉnh và x^g là phần tử cho trước đóng vai trò phần tử tuyển chọn.

Trong những năm gần đây, nhiều tác giả [20, 26, 40, 46] đã áp dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov vào việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân

$$VI(K, F): \text{ Tìm } x \in K \text{ sao cho } \langle F(x), y - x\rangle \geq 0, \ \forall y \in K$$

với $F : K \to K$ là toán tử đơn trị. Để giải bài toán này, theo phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, người ta giải một dãy bài toán hiệu chỉnh

$$\text{Tìm } x^k \in K \text{ sao cho } \left\langle F_{\varepsilon_k}(x^k), y - x^k\right\rangle \geq 0, \ \forall y \in K, \tag{1}$$

trong đó $F_{\varepsilon_k} := F + \varepsilon_k I$ là toán tử hiệu chỉnh, $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là ánh xạ đồng nhất và $\{\varepsilon_k\}$ là dãy các số thực dương sao cho $\varepsilon_k \to 0^+$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, chọn một

[2]Andrey Nikolayevich Tikhonov (30/10/1906 – 8/11/1993) là nhà toán học Nga nổi tiếng với những đóng góp quan trọng trong các lĩnh vực tôpô, giải tích hàm, vật lý toán và các bài toán đặt không chỉnh. Ông cũng là một trong những nhà phát minh ra phương pháp địa từ trong địa chất học.

nghiệm x^k của bài toán (1); dãy nghiệm này được gọi là một quỹ đạo nghiệm của bài toán. Tính giới hạn $\lim_{k\to\infty} x^k$ và nếu giới hạn này tồn tại, hy vọng rằng, nó chính là nghiệm của bài toán gốc $VI(K, F)$. Để kết thúc quá trình tính toán sau hữu hạn bước và nhận được nghiệm xấp xỉ của bài toán gốc, cần phải đưa ra một tiêu chuẩn dừng, chẳng hạn như $\|x^k - x^{k-1}\| \le \theta$ với $\theta > 0$ là một hằng số cho trước.

Nếu F đơn điệu trên $K \subseteq \mathbb{R}^n$ thì bài toán hiệu chỉnh (1) có duy nhất nghiệm x^k và dãy nghiệm $\{x^k\}$ hội tụ về nghiệm có chuẩn bé nhất của bài toán gốc $VI(K, F)$ (xem [18, Theorem 12.2.3]). Năm 2006, N.T. Hao [20] đã chứng minh được rằng, nếu F liên tục và giả đơn điệu trên $K \subseteq \mathbb{R}^n$ thì các bài toán hiệu chỉnh có nghiệm khi và chỉ khi bài toán gốc có nghiệm và mặc dù các bài toán hiệu chỉnh không duy nhất nghiệm nhưng dãy $\{x^k\}$, với x^k được chọn tùy ý trong tập nghiệm của bài toán (1), vẫn hội tụ về nghiệm có chuẩn bé nhất của bài toán gốc. Năm 2008, nhóm Tam-Yao-Yen [46] đã phát triển các kết quả trên của N.T. Hao vào không gian Hilbert thực vô hạn chiều $\mathcal{H}$ và họ đã cho thấy rằng, nếu F giả đơn điệu và liên tục yếu trên $K \subseteq \mathcal{H}$ và tập nghiệm của bài toán gốc khác rỗng thì tập nghiệm của bài toán hiệu chỉnh bị chặn đều và khác rỗng nếu toán tử hiệu chỉnh F_{ε_k} giả đơn điệu. Ngoài ra, nếu F liên tục trên K thì bất kỳ dãy con hội tụ nào của $\{x^k\}$ cũng hội tụ về nghiệm có chuẩn bé nhất của bài toán gốc.

Dễ dàng thấy rằng, nếu đặt $f(x, y) := \langle F(x), y - x\rangle$ thì ta có thể mô tả được bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(K, F)$ dưới dạng BTCB $E(K, f)$. Điều này gợi ý cho ta việc mở rộng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov vào giải BTCB $E(K, f)$ với bài toán hiệu chỉnh

$$\begin{cases} \text{Tìm } x^k \in K \text{ sao cho} \\ f_{\varepsilon_k}(x^k, y) := f(x^k, y) + \varepsilon_k g(x^k, y) \ge 0, \ \forall y \in K, \end{cases} \tag{2}$$

trong đó $x^g \in K$ là một điểm cho trước đóng vai trò nghiệm phỏng đoán của bài toán $E(K, f)$ và $g(x, y)$ là hàm cân bằng đơn điệu mạnh trên K. Một trường hợp riêng quan trọng khi g là hàm khoảng cách được cho bởi

$$g(x, y) = \langle x - x^g, y - x\rangle .$$

Năm 2003, nhóm nghiên cứu của I.V. Konnov [25] đã chứng tỏ được rằng: Với giả thiết f là hàm cân bằng đơn điệu trên K; $f(x, .)$ và $g(x, .)$ lồi, nửa liên tục dưới với mỗi $x \in K$; $g(., y)$ bán liên tục với mỗi $y \in K$ và g thỏa tính chất

$$|g(x, y)| \leq \|x\| \|x - y\|, \ \forall x, y \in K.$$

Khi đó f_{ε_k} đơn điệu mạnh và bài toán hiệu chỉnh (2) có duy nhất nghiệm x^k với mọi $\varepsilon_k > 0$ và dãy nghiệm $\{x^k\}$ hội tụ về nghiệm duy nhất của BTCB

$$g(x, y) \geq 0, \ \forall y \in SE(K, f),$$

trong đó $SE(K, f)$ là tập nghiệm của bài toán gốc $E(K, f)$.

Vấn đề đặt ra là, trong trường hợp f là giả đơn điệu thay vì đơn điệu thì phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov có còn áp dụng cho BTCB được hay không? Và nếu áp dụng được thì các kết quả của Konnov-Pinyagina [25] cho BTCB đơn điệu cũng như của N.T. Hao [20] và Tam-Yao-Yen [46] cho bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu có còn giá trị cho BTCB giả đơn điệu nữa hay không? Những vấn đề này sẽ được chúng ta giải quyết trong luận án.

Một phương pháp hiệu chỉnh quen thuộc khác đó là phương pháp điểm gần kề. Phương pháp này được đề xuất bởi B. Martinet [31] vào năm 1970 cho bất đẳng thức biến phân và được phát triển bởi R.T. Rockafellar [44] trong năm 1976 cho bao hàm thức đơn điệu cực đại. Cũng từ đây, phương pháp đó trở thành một trong những phương pháp thông dụng nhất để giải rất nhiều bài toán trong các lĩnh vực khác nhau như phương trình phi tuyến, bài toán tối ưu, bài toán cân bằng,...

Tương tự như phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, để giải BTCB $E(K, f)$ theo phương pháp điểm gần kề, người ta giải dãy bài toán phụ

$$\begin{cases} \text{Tìm } x^k \in K \text{ sao cho} \\ f_k(x^k, y) := f(x^k, y) + c_k \left\langle x^k - x^{k-1}, y - x^k \right\rangle \geq 0, \forall y \in K. \end{cases} \tag{3}$$

Điểm khác biệt cơ bản của phương pháp điểm gần kề so với phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov đó là: tại mỗi bước lặp của phương pháp điểm gần kề, bài toán hiệu chỉnh phụ thuộc vào điểm lặp ở bước trước và tham số hiệu chỉnh $c_k > 0$ không cần dần đến 0.

Năm 1999, A.Moudafi [34] đã xét bài toán hiệu chỉnh

$$\text{Tìm } x^k \in K \text{ sao cho } f_k(x^k, y) \geq 0, \ \forall y \in K, \tag{4}$$

trong đó

$$f_k(x^k, y) := f(x^k, y) + c_k \left\langle h'(x^k) - h'(x^{k-1}), y - x^k \right\rangle .$$

Ông đã chỉ ra rằng: Nếu f đơn điệu và bán liên tục trên trên $K \subseteq \mathcal{H}$ sao cho $f(x, .)$ lồi, nửa liên tục dưới trên K với mỗi $x \in K$; h là hàm lồi mạnh và đạo hàm của nó liên tục Lipshitz trên K thì bài toán (4) có duy nhất nghiệm x^k và dãy nghiệm $\{x^k\}$ hội tụ yếu về nghiệm của bài toán gốc $E(K, f)$.

Cũng trong tài liệu [46], khi áp dụng phương pháp điểm gần kề cho bài toán bất đẳng thức biến phân $VI(K, F)$, nhóm Tam-Yao-Yen đã xét bài toán hiệu chỉnh

$$\text{Tìm } x^k \in K \text{ sao cho } \left\langle F_k(x^k), y - x^k \right\rangle \geq 0, \forall y \in K, \tag{5}$$

trong đó $F_k := \rho_k F + I - x^{k-1}$ và $\rho_k \geq \rho > 0$ với ρ là hằng số. Họ đã cho thấy, nếu F giả đơn điệu, liên tục yếu trên $K \subseteq \mathcal{H}$ và tập nghiệm của bài toán gốc $VI(K, F)$ khác rỗng thì tập nghiệm của bài toán (5) khác rỗng nếu như F_k giả đơn điệu. Khi đó dãy $\{x^k\}$, với x^k được chọn tùy ý trong tập nghiệm của bài toán (5), bị chặn. Ngoài ra, nếu F liên tục trên K và tồn tại một dãy con của $\{x^k\}$ hội tụ về $\bar{x} \in \mathcal{H}$ thì $\bar{x}$ là nghiệm của bài toán gốc và toàn bộ dãy $\{x^k\}$ hội tụ về $\bar{x}$.

Cũng như đối với phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, vấn đề đặt ra cho chúng ta ở đây là phải chứng tỏ được rằng, các kết quả của Tam-Jao-Yen [46] khi áp dụng phương pháp điểm gần kề cho bài toán bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu cũng như của Moudafi [34] cho BTCB đơn điệu nói trên, vẫn có thể phát triển được cho BTCB giả đơn điệu.

Mục đích của luận án nhằm nghiên cứu một số phương pháp hiệu chỉnh cho BTCB đặt không chỉnh trên cơ sở giải quyết các vấn đề sau đây:

1) Mở rộng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề vào BTCB đơn điệu và giả đơn điệu, đặc biệt là giả đơn điệu. Nghiên cứu sự hội tụ của các phương pháp giải và giải quyết vấn đề đặt không chỉnh của bài toán.

2) Nghiên cứu tính ổn định của các phương pháp giải, đặc biệt là phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, đối với BTCB đặt không chỉnh (đơn điệu và giả đơn điệu).

3) Áp dụng các kết quả đã đạt được vào bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị và bài toán tối ưu hai cấp.

Nội dung của luận án được trình bày trong bốn chương; các kết quả chính của luận án chủ yếu nằm ở hai chương cuối.

Chương 1 chỉ có tính chất bổ trợ, làm công cụ phục vụ cho các chương sau của luận án. Cụ thể, chương này đã nhắc lại một số khái niệm và các kết quả cần thiết nhất về giải tích hàm, giải tích lồi và giải tích đa trị như: sự hội tụ yếu trong không gian Hilbert, phép chiếu lên tập lồi đóng và các định lý tách tập lồi, tính liên tục của hàm lồi, đạo hàm và dưới vi phân của hàm lồi, cực trị của hàm lồi, và tính liên tục của ánh xạ đa trị.

Chương 2, phần thứ nhất giới thiệu BTCB và để thấy được ý nghĩa của bài toán này, ta sẽ đưa ra một số ví dụ, đó chính là những bài toán quen thuộc, các mô hình toán kinh tế có thể mô tả được dưới dạng BTCB. Phần thứ hai nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và nêu lên một số tính chất cơ bản của BTCB. Phần cuối trình bày một cách tiếp cận giải BTCB rất quen thuộc, đó là tiếp cận theo nguyên lý bài toán phụ.

Chương 3, phần đầu tiên đưa ra các khái niệm về bài toán đặt không chỉnh và giới thiệu phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov áp dụng cho phương trình toán tử và bài toán bất đẳng thức biến phân. Phần chính của chương trình bày việc mở rộng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov vào BTCB đặt không chỉnh trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$. Đầu tiên, chúng ta sẽ chỉ ra rằng, các kết quả hội tụ nhận được từ bất đẳng thức biến phân đơn điệu vẫn còn giá trị cho BTCB đơn điệu. Tiếp theo, đối với BTCB giả đơn điệu, điều khó khăn nảy sinh ra trong trường hợp này là các bài toán hiệu chỉnh không còn đơn điệu mạnh nữa thậm chí là không giả đơn điệu, vì thế, tính duy nhất nghiệm của các bài toán này không còn nữa. Tuy nhiên, chúng ta vẫn chứng tỏ được rằng, các bài toán hiệu chỉnh có nghiệm khi và chỉ khi bài toán gốc có nghiệm, và hơn nữa, bất kỳ quỹ đạo nghiệm nào cũng hội tụ về cùng một nghiệm của bài toán gốc. Sau đó, chúng ta sẽ đưa ra một số thông tin về tập nghiệm của bài toán hiệu chỉnh khi hàm cân bằng của bài toán gốc là giả đơn điệu và thỏa mãn điều kiện bức. Phần cuối của chương áp dụng các kết quả nói trên vào bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị.

Chương 4, phần thứ nhất và thứ hai nghiên cứu các phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề xấp xỉ cho BTCB giả đơn điệu trong không gian Hilbert thực, qua đó cho ta thấy, có thể phát triển các kết quả đạt được trong Chương 3 vào không gian vô hạn chiều. Chúng ta sẽ chứng tỏ được rằng: bài toán hiệu chỉnh xấp xỉ có nghiệm khi bài toán gốc có nghiệm và bất kỳ dãy nghiệm nào của các bài toán hiệu chỉnh xấp xỉ cũng hội tụ về cùng một nghiệm của bài toán gốc; nghiệm này cũng chính là hình chiếu của nghiệm phỏng đoán lên tập nghiệm của bài toán $E(K, f)$ trong trường hợp sử dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov. Phần thứ ba áp dụng các kết quả nói trên vào bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị giả đơn điệu. Để thấy được ý nghĩa các kết quả đã đạt được trong luận án, hai phần cuối của chương trình bày một cách giải BTCB giả đơn điệu và bàn về tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov áp dụng cho BTCB đặt không chỉnh thông qua cách tiếp cận giải bài toán tối ưu hai cấp.

Các kết quả của chúng tôi nêu trong luận án đã được báo cáo tại

- Hội thảo khoa học Sau đại học.
  Đại học Đà lạt, 25/11/2009.

- Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 8.
  Ba Vì−Hà Nội, 20−23/04/2010.

- Hội thảo khoa học Khoa khoa học cơ bản.
  Đại học Nha Trang, 24/01/2011.

- Hội thảo Công nghệ thông tin và Toán ứng dụng lần thứ nhất.
  Đại học Nha Trang, 17/06/2011.

- The $8th$ Vietnam−Korea Workshop:
  "Mathematical Optimization Theory and Applications".
  University of Dalat, 08−10/12/2011.

- Hội thảo "Một số hướng nghiên cứu mới trong giải tích và ứng dụng".
  Đại học Hồng Đức, Thanh Hóa, 24-27/05/2012.

Chương 1

Một số kiến thức bổ trợ

Chương này nhắc lại một số khái niệm và các kết quả cần thiết nhất về giải tích hàm, giải tích lồi và giải tích đa trị. Nội dung của chương chủ yếu được lấy từ các tài liệu [4, 5, 10, 53, 57].

1.1 Sự hội tụ yếu trên không gian Hilbert

Định nghĩa 1.1.1. Cho $\mathcal{H}$ là không gian vector thực. Tích vô hướng $\langle x, y\rangle$ là dạng song tuyến tính từ $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ vào $\mathbb{R}$, đối xứng và xác định dương. Một không gian vector được trang bị một tích vô hướng $\langle x, y\rangle$ và đầy đủ đối với chuẩn

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

được gọi là không gian Hilbert thực (*real Hilbert space*). Từ đây ta luôn ký hiệu $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert (thực).

Nhắc lại rằng, tích vô hướng $\langle x, y\rangle$ là một hàm liên tục theo x và y; thỏa mãn bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, x\rangle| \leq \|x\|.\|y\|,\ \forall x, y \in \mathcal{H}$$

và đẳng thức hình bình hành

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2),\ \forall x, y \in \mathcal{H}.$$

Không gian vector $\mathbb{R}^n$ là không gian Hilbert với tích vô hướng và chuẩn, tương ứng là

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,\ \|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Định lý 1.1 (Định lý Riesz-Fréchet). (Xem [10, Theorem III.5]) *Giả sử $\mathcal{H}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{H}$ (không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục trên $\mathcal{H}$). Khi đó, với mọi $f \in \mathcal{H}^*$ tồn tại duy nhất $a \in \mathcal{H}$ sao cho*

$$f(x) = \langle a, x\rangle \ \text{ và } \|f\| = \|a\|. \tag{1.1}$$

Định lý Riesz-Fréchet có ý nghĩa rất cơ bản trong toàn bộ lý thuyết không gian Hilbert; nó chứng tỏ rằng, mọi phiếm hàm tuyến tính trên không gian Hilbert $\mathcal{H}$ có thể được biểu diễn thành tích vô hướng và hơn nữa, ánh xạ xác định bởi (1.1) là đẳng cấu đẳng cự cho phép đồng nhất $\mathcal{H}$ với không gian đối ngẫu $\mathcal{H}^*$ của nó.

Định nghĩa 1.1.2. Tôpô yếu (*weak topo*) $\sigma(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$ trên $\mathcal{H}$ là tôpô mịn nhất biến tất cả ánh xạ $\varphi_f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, được xác định bởi

$$\varphi_f(x) = f(x),\ \forall x \in \mathcal{H},\ \forall f \in \mathcal{H}^*,$$

liên tục.

Ta nói dãy $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$ hội tụ yếu (*weakly convergence*) về vector $x \in \mathcal{H}$, ký hiệu $x^k \rightharpoonup x$, nếu $\{x^k\}$ hội tụ về x trong tôpô yếu $\sigma(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$. Nếu $\lim_{k\to\infty} \|x^k - x\| = 0$ thì ta nói $\{x^k\}$ hội tụ mạnh (*strongly convergence*) về x và viết $x^k \to x$.

Định lý 1.2. (Xem [10, Propositions III.5, III.30]) *Giả sử $\{x^k\} \subset \mathcal{H}$. Khi đó*

a) *Dãy $\{x^k\}$ hội tụ yếu về x khi và chỉ khi $\{\langle x^k, y\rangle\}$ hội tụ mạnh về $\langle x, y\rangle$ với mọi $y \in \mathcal{H}$.*

b) *Nếu $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về x thì nó hội tụ yếu về x.*

c) *Nếu $\{x^k\}$ hội tụ yếu về x thì nó bị chặn và $\|x\| \le \underline{\lim}_{k\to\infty}\|x^k\|$.*

d) *Nếu $\{x^k\}$ hội tụ yếu về x và $\overline{\lim}_{k\to\infty}\|x^k\| \le \|x\|$ thì $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về x.*

e) *Nếu $\{x^k\}$ hội tụ yếu về x và $\{f^k\}$ hội tụ mạnh về f trong $\mathcal{H}^*$ thì $\{f^k(x^k)\}$ hội tụ mạnh về $f(x)$.*

Khi $\mathcal{H}$ là không gian hữu hạn chiều thì tôpô yếu và tôpô thông thường trên $\mathcal{H}$ trùng nhau. Đặc biệt, một dãy hội tụ yếu khi và chỉ khi nó hội tụ mạnh.

Mọi tập đóng (/ mở) đối với tôpô yếu là đóng (/ mở) đối với tôpô mạnh. Điều ngược lại là không đúng trong trường hợp không gian vô hạn chiều. Tuy nhiên, với các tập lồi hai khái niệm đóng yếu và đóng là trùng nhau. Nhắc lại rằng

Định nghĩa 1.1.3. Cho X là không gian vector và $K \subseteq X$. Ta nói

a) K là tập lồi (*convex set*), nếu

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in K,\ \forall x, y \in K,\ \forall \lambda \in [0,1].$$

b) K là nón (*cone*) có đỉnh tại 0, nếu

$$\forall x \in K, \forall \lambda > 0 \Rightarrow \lambda x \in K.$$

Tập K được gọi là nón có đỉnh tại x^0 nếu $K - x^0$ là nón có đỉnh tại 0.

1.2 Phép chiếu lên tập lồi đóng - Các định lý tách tập lồi

Bài toán tìm hình chiếu trên một tập lồi đóng có vai trò quan trọng trong tối ưu và nhiều lĩnh vực khác như bất đẳng thức biến phân, cân bằng... Bài toán có rất nhiều ứng dụng, đặc biệt nó xuất hiện như một bài toán phụ trong rất nhiều phương pháp số đối với các bài toán nói trên; đây cũng là một công cụ sắc bén và khá đơn giản để chứng minh nhiều định lý quan trọng như định lý tách, các định lý về sự tồn tại nghiệm của nhiều vấn đề khác nhau trong toán học ứng dụng.

Định nghĩa 1.2.1. Cho $D \subset \mathcal{H}$ khác rỗng. Với $x \in \mathcal{H}$, ta gọi

$$d_D(x) := \inf_{y \in D} \|x - y\|$$

là khoảng cách từ x đến D. Nếu tồn tại $x^* \in D$ sao cho $d_D(x) = \|x - x^*\|$ thì x^* được gọi là hình chiếu vuông góc của x trên D, ký hiệu $x^* := p_D(x)$.

Định lý 1.3 (Phép chiếu lên tập lồi đóng). (Xem [10, Propositions V.2, V.3]) *Cho $K \subset \mathcal{H}$ là tập lồi đóng khác rỗng. Khi đó*

a) *Với mọi $x \in \mathcal{H}$, hình chiếu x^* của x trên K luôn tồn tại duy nhất và*

$$x^* = p_K(x) \Leftrightarrow \langle x - x^*, y - x^* \rangle \leq 0, \ \forall y \in K.$$

b) *Ánh xạ $p_K : \mathcal{H} \to K$ có các tính chất sau*

b_1) $\|p_K(x) - p_K(y)\| \leq \|x - y\|, \forall x, y$ (*tính không giãn*).

b_2) $\|p_K(x) - p_K(y)\|^2 \leq \langle p_K(x) - p_K(y), x - y \rangle, \forall x, y$ (*tính đồng bức*).

Trong giải tích lồi cũng như nhiều lĩnh vực khác như giải tích hàm, giải tích không trơn, giải tích phi tuyến v.v..., các định lý tách hai tập lồi có một vai trò trung tâm. Chúng thuộc loại định lý chọn và là công cụ rất mạnh trong nhiều lĩnh vực rất khác nhau, thường được dùng để chứng minh sự tồn tại của một đối tượng.

Định nghĩa 1.2.2. Cho hai tập $C, D \subset \mathcal{H}$ khác rỗng. Ta nói siêu phẳng $\langle a, x \rangle = \alpha$ tách C và D nếu

$$\langle a, x \rangle \leq \alpha \leq \langle a, y \rangle, \ \forall x \in C, \ \forall y \in D;$$

và tách mạnh C và D nếu

$$\sup_{x \in C} \langle a, x \rangle < \alpha < \inf_{y \in D} \langle a, y \rangle.$$

Định lý 1.4 (Định lý tách 1). (Xem [10, Theorem I.6]) *Giả sử $C, D \subset \mathcal{H}$ là hai tập lồi khác rỗng sao cho $C \cap D = \emptyset$ và C mở. Khi đó có một siêu phẳng tách C và D.*

Định lý 1.5 (Định lý tách 2). (Xem [10, Theorem I.7]) *Giả sử $C, D \subset \mathcal{H}$ là hai tập lồi khác rỗng sao cho $C \cap D = \emptyset$, C đóng và D compắc. Khi đó có một siêu phẳng tách mạnh C và D.*

1.3 Tính liên tục của hàm lồi

Định nghĩa 1.3.1. Cho X là không gian lồi địa phương, $K \subseteq X$ là tập lồi và hàm $f : K \to (-\infty, +\infty]$.

a) Ta nói f là hàm lồi (*convex function*) trên K nếu với mọi $x, y \in K$ và $\lambda \in [0,1]$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y);$$

là hàm lồi chặt (*strictly convex function*) trên K nếu với mọi $x, y \in K$ $(x \neq y)$ và $\lambda \in [0,1]$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y);$$

và là hàm lồi mạnh (*strongly convex function*) trên K với hệ số $\mu > 0$ nếu với mọi $x, y \in K$ và $\lambda \in [0,1]$, ta có

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - \frac{1}{2}\mu\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

b) Các tập

$$\begin{aligned} dom f &:= \{x \in K : f(x) < +\infty\}, \\ epi f &:= \{(x,\gamma) \in K \times \mathbb{R} : f(x) \leq \gamma\}, \end{aligned}$$

tương ứng, được gọi là miền hữu hiệu (*effective domain*) và trên đồ thị (*epigraph*) của f.

c) Hàm f được gọi là chính thường (*proper function*) nếu $dom f \neq \emptyset$ và $f(x) > -\infty$ với mọi $x \in K$. Hàm f được gọi là lõm (*concave function*) trên K nếu $-f$ là lồi trên K. Hàm f được gọi là đóng (*closed function*) trên K nếu $epi f$ là một tập đóng trong $X \times \mathbb{R}$.

Các ví dụ tiêu biểu về hàm lồi là hàm chuẩn, hàm khoảng cách, hàm chỉ và hàm tựa.

Định lý 1.6. (Xem [53, Định lý 2.1]) *Cho $K \subseteq X$ là tập lồi và hàm $f : K \to (-\infty, +\infty]$. Khi đó f lồi trên K khi và chỉ khi $epi f$ là tập lồi.*

Nhận xét 1.3.1. Ta thấy rằng

(n_1) Nếu f là một hàm lồi trên tập lồi K thì có thể mở rộng f lên toàn không gian bằng cách đặt $f_e(x) := f(x)$ nếu $x \in K$ và $f_e(x) := +\infty$ nếu $x \notin K$. Dễ thấy $f_e(x) = f(x)$ với mọi $x \in K$ và f_e lồi trên X. Hơn nữa f_e là chính thường (/ đóng) khi và chỉ khi f là chính thường (/ đóng).

(n_2) Nếu f là hàm lồi thì $domf$ là một tập lồi bởi $domf$ là hình chiếu của $epif$ lên X.

(n_3) Hàm f lồi mạnh trên K với hệ số μ khi và chỉ khi hàm $h(x) := f(x) - \frac{\mu}{2}\|x\|^2$ lồi trên K.

(n_4) Nếu các hàm $f_i : K \to \mathbb{R}$ $(i \in I)$ là lồi thì $\sum_{i\in I} \alpha_i f_i$ $(\forall \alpha_i \geq 0)$ và $\sup_{i\in I} f_i$ là các hàm lồi trên K.

Định lý 1.7. (Xem [53, Định lý 2.3]) *Giả sử $f : K \to (-\infty, +\infty]$ là hàm lồi và $\alpha \in [-\infty, +\infty]$. Khi đó các tập mức dưới*

$$L^0_\alpha(f) := \{x \in K : f(x) < \alpha\} \quad \text{và} \quad L_\alpha(f) := \{x \in K : f(x) \leq \alpha\}$$

là các tập lồi.

Kết luận ngược lại của Định lý 1.7 là không đúng, tức là, một hàm f mà mọi tập mức dưới của nó đều lồi thì có thể không lồi trên K. Hàm f có tính chất như thế được gọi là tựa lồi (*quasiconvex function*) trên K. Hàm f được gọi là tựa lõm (*quasiconcave function*) trên K nếu $-f$ là tựa lồi trên K.

Định nghĩa 1.3.2. Cho $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$.

a) Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới (*lower semicontinuous - l.s.c.*) tại $x^0 \in \mathcal{H}$ nếu
$$\underline{\lim}_{x\to x^0} f(x) \geq f(x^0)$$
hay
$$\forall \{x^k\} \subset \mathcal{H} : x^k \to x^0 \Rightarrow \underline{\lim}_{k\to\infty} f(x^k) \geq f(x^0).$$

b) Hàm f được gọi là nửa liên tục dưới trên $D \subseteq \mathcal{H}$ nếu nó nửa liên tục dưới tại mọi $x \in D$. Hàm f được gọi là nửa liên tục trên (*upper semicontinuous - u.s.c.*) nếu $-f$ là nửa liên tục dưới. Hàm f được gọi là liên tục (*continuous*) nếu nó vừa nửa liên tục dưới vừa nửa liên tục trên.

Định lý 1.8. (Xem [53, Mệnh đề 2.3]) *Cho $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương nhau*

a) *Hàm f nửa liên tục dưới trên $\mathcal{H}$.*

b) *Trên đồ thị $epif$ là một tập đóng trong $\mathcal{H}$.*

c) *Với mọi số thực α, tập mức dưới $L_\alpha(f)$ là một tập đóng.*

Định lý 1.9. (Xem [53, Định lý 2.9]) *Giả sử f là hàm lồi chính thường trên $\mathcal{H}$ và $x^0 \in \mathcal{H}$. Khi đó các khẳng định sau đây là tương đương nhau*

a) *f liên tục tại điểm x^0.*

b) *f bị chặn trên trong một lân cận mở của x^0.*

c) *$int(epif) \neq \emptyset$.*

d) *$int(domf) \neq \emptyset$ và f liên tục trong $int(domf)$.*

1.4 Đạo hàm và dưới vi phân của hàm lồi

Định nghĩa 1.4.1. Giả sử $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $x \in \mathcal{H}$ và $d \in \mathcal{H}\backslash\{0\}$. Ta nói

a) f khả vi (*Fréchet differentiable*) tại x nếu tồn tại $x^* \in \mathcal{H}$ sao cho

$$\lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x) - \langle x^*, z - x\rangle}{\|z - x\|} = 0.$$

Một điểm x^* như thế, nếu tồn tại sẽ duy nhất và được gọi là đạo hàm của f tại x, ký hiệu là $\nabla f(x)$ hoặc $f'(x)$.

b) f có đạo hàm theo phương (*directionally differentiable*) d tại x nếu tồn tại giới hạn

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t}.$$

Ta gọi giới hạn đó là đạo hàm theo phương d của f tại x, ký hiệu là $f'(x, d)$.

Định nghĩa 1.4.2. Cho $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi. Ta nói $x^* \in \mathcal{H}$ là dưới gradient (*subgradient*) của f tại $x \in \mathcal{H}$ nếu

$$\langle x^*, z - x\rangle \leq f(z) - f(x), \ \forall z \in \mathcal{H}.$$

Tập tất cả dưới gradient của f tại x được gọi là dưới vi phân (*subdifferential*) của f tại x, ký hiệu $\partial f(x)$. Hàm f được gọi là khả dưới vi phân (*subdifferentiable*) tại x nếu $\partial f(x) \neq \emptyset$.

Định nghĩa 1.4.3. Cho K là một tập lồi khác rỗng trong $\mathcal{H}$. Vector $p \in \mathcal{H}$ được gọi là pháp tuyến (*normal*) của K tại $x \in K$, nếu

$$\langle p, z - x \rangle \leq 0, \forall z \in K.$$

Tập tất cả các vector pháp tuyến của K tại x được gọi là nón pháp tuyến (*normal cone*) của K tại x, ký hiệu là $N_K(x)$. Tập $-N_K(x)$ được gọi là nón pháp tuyến trong của K tại x. Có thể thấy rằng, nếu $x \in riK$ thì $N_K(x) = \{0\}$.

Định lý 1.10. (Xem [53, Định lý 4.1, 4.3, 4.6, Mệnh đề 4.6]) *Giả sử f là hàm lồi chính thường trên $\mathcal{H}$ và $x \in domf$. Khi đó*

a) *f có đạo hàm theo mọi phương tại x và*

$$f'(x, d) = \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda}.$$

b) *$x^* \in \partial f(x) \Leftrightarrow f'(x, d) \geq \langle x^*, d \rangle, \ \forall d \in \mathcal{H}$.*

c) *$\partial f(x) \neq \emptyset \Leftrightarrow f$ nửa liên tục dưới tại 0.*

d) *Nếu f khả vi tại $x \in \mathcal{H}$ thì $\partial f(x) = \{f'(x)\}$.*

1.5 Cực trị của hàm lồi

Cực trị của một hàm lồi trên một tập lồi có những tính chất riêng, rất lý thú. Việc nghiên cứu tính chất cực trị của hàm lồi là một đề tài rất quan trọng của lý thuyết tối ưu.

Định nghĩa 1.5.1. Cho X là không gian lồi địa phương, $D \subseteq X$ và hàm $f : D \to (-\infty, \infty]$. Ta nói f đạt cực tiểu (/ cực đại) địa phương tại $x^0 \in D$ nếu tồn tại một lân cận U của x^0 sao cho

$$f(x^0) \leq f(x) \ (/ \ f(x^0) \geq f(x)), \ \forall x \in U \cap D.$$

và nói f đạt cực tiểu (/ cực đại) toàn cục trên D tại x^0 nếu

$$f(x^0) \leq f(x) \ (/ \ f(x^0) \geq f(x)), \ \forall x \in D.$$

Định lý 1.11. (Xem [4, Propositions 11.4, 11.5, 11.6, 11.7]) *Cho* $f : \mathcal{H} \to (-\infty, \infty]$ *là hàm lồi chính thường và* $K \subseteq \mathcal{H}$ *là tập lồi khác rỗng. Khi đó mọi điểm cực tiểu địa phương của* f *trên* K *đều là cực tiểu toàn cục và tập các điểm cực tiểu* $argmin\{f(x) : x \in K\}$ *của* f *là lồi. Hơn nữa, nếu* f *lồi chặt thì điểm cực tiểu của nó nếu có là duy nhất.*

Định lý 1.12 (Quy tắc Fermat). (Xem [4, Theorem 16.2]) *Giả sử* $f : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$ *là hàm lồi chính thường, khả dưới vi phân. Khi đó*

$$x^* \in argmin\{f(x) : x \in \mathcal{H}\} \Leftrightarrow 0 \in \partial f(x^*).$$

Định lý 1.13. (Xem [53, Định lý 5.1]) *Cho* $f : \mathcal{H} \to (-\infty, +\infty]$ *là hàm lồi, khả dưới vi phân và* $K \subseteq \mathcal{H}$ *là tập lồi khác rỗng. Khi đó, nếu* f *liên tục tại một điểm nào đó của* K *và* $x^* \in argmin\{f(x) : x \in K\}$ *thì*

$$0 \in \partial f(x^*) + N_K(x^*). \tag{1.2}$$

Ngược lại, nếu (1.2) *đúng tại* x^* *thì* $x^* \in argmin\{f(x) : x \in K\}$.

1.6 Tính liên tục của ánh xạ đa trị

Chúng ta thường gặp ánh xạ đa trị mỗi khi phải đối mặt với các bài toán ngược hoặc những bài toán đặt không chỉnh, tức là những bài toán mà sự tồn tại nghiệm hoặc tính duy nhất nghiệm của chúng không được đảm bảo bởi các dữ kiện ban đầu. Ánh xạ đa trị là một công cụ sắc bén giúp ta giải quyết nhiều vấn đề trong nhiều lĩnh vực khác nhau.

Định nghĩa 1.6.1. Cho X và Y là hai không gian tôpô. Một ánh xạ F từ X vào tập tất cả các tập con của Y, ký hiệu là $F : X \to 2^Y$, được gọi là ánh xạ (toán tử) đa trị (*multivalued or set-valued map*). Nếu mỗi $x \in X$ tập $F(x)$ chỉ gồm đúng một phần tử của Y thì ta nói F là ánh xạ đơn trị (*single-valued map*) từ X vào Y và sử dụng ký hiệu thông thường $F : X \to Y$.

a) Đồ thị, miền hữu hiệu và miền ảnh của F, tương ứng, là tập

$$\begin{aligned} gphF &:= \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}, \\ domF &:= \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}, \\ rgeF &:= \{y \in Y : \exists x \in X \text{ sao cho } y \in F(x)\}. \end{aligned}$$

b) Ánh xạ ngược $F^{-1} : Y \to 2^X$ của F được xác định bởi

$$x \in F^{-1}(y) \Leftrightarrow y \in F(x) \Leftrightarrow (x, y) \in gphF.$$

c) Với $V \subset Y$, ta gọi tập

$$F^{-1}(V) := \{x \in domF : F(x) \subset V\},$$
$$F^{+1}(V) := \{x \in domF : F(x) \cap V \neq \emptyset\},$$

tương ứng, là ảnh ngược và nhân của V qua F.

Định nghĩa 1.6.2. Cho X và Y là các không gian tuyến tính tôpô và $F : X \to 2^Y$.

a) Nếu $gphF$ là tập đóng (lồi, tương ứng) trong $X \times Y$ thì F được gọi là ánh xạ đóng (lồi, tương ứng).

b) Nếu $F(x)$ là tập đóng (lồi, compắc, khác rỗng, tương ứng) với mọi $x \in X$ thì F được gọi là ánh xạ có giá trị đóng (lồi, compắc, khác rỗng, tương ứng).

Định nghĩa 1.6.3. Cho F là ánh xạ đa trị từ không gian tôpô X vào không gian tôpô Y.

a) Ta nói F là nửa liên tục dưới tại $x^0 \in domF$ nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(x^0) \cap V \neq \emptyset$, tồn tại một lân cận mở U của x^0 sao cho

$$F(x) \cap V \neq \emptyset, \ \forall x \in U \cap domF.$$

b) Ta nói F là nửa liên tục trên tại $x^0 \in domF$ nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(x^0) \subset V$, tồn tại một lân cận mở U của x^0 sao cho

$$F(x) \subset V, \ \forall x \in U.$$

c) Nếu F nửa liên tục dưới (nửa liên tục trên, tương ứng) tại mọi điểm thuộc $domF$ thì F được gọi là nửa liên tục dưới (nửa liên tục trên, tương ứng) trong X. Ta nói F liên tục tại x nếu nó vừa nửa liên tục dưới và nửa liên tục trên tại x.

Định lý 1.14. (Xem [5, Ch.VI, Theorems 1 & 2]) *Cho X và Y là hai không gian tôpô và $F : X \to 2^Y$. Khi đó*

a) *F nửa liên tục dưới khi và chỉ khi ảnh ngược qua F của bất kỳ tập mở nào trong Y cũng là tập mở trong X.*

b) *F nửa liên tục trên khi và chỉ khi F có giá trị compắc và nhân qua F của bất kỳ tập mở nào trong Y cũng là tập mở trong X.*

Định lý 1.15. (Xem [5, Ch.VI, Theorems 3 & 6]) *Cho X và Y là hai không gian tôpô. Khi đó nếu $F : X \to 2^Y$ nửa liên tục trên thì F là ánh xạ đóng và ảnh qua F của mọi tập compắc trong X cũng là tập compắc trong Y.*

Định lý 1.16. (Xem [5, Ch.VI, Theorems 7]) *Cho X và Y là hai không gian tôpô. Khi đó nếu $F_1 : X \to 2^Y$ đóng và $F_2 : X \to 2^Y$ nửa liên tục trên thì $F = F_1 \cap F_2$ nửa liên tục trên.*

Hệ quả 1.17. *Nếu Y là không gian compắc thì $F : X \to 2^Y$ nửa liên tục trên khi và chỉ khi nó là ánh xạ đóng.*

Định lý 1.18 (Định lý cực đại Berge). (Xem [5, Ch.VI, Theorems 1, 2 & Maximum Theorem]) *Cho X và Y là hai không gian tôpô. Giả sử $F : X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị có giá trị khác rỗng; $\varphi : X \times Y \to \mathbb{R}$ là hàm đơn trị. Khi đó*

a) *Nếu φ và F nửa liên tục dưới thì ánh xạ f được xác định bởi*

$$f(x) := \sup\{\varphi(x, y) : y \in F(x)\}$$

là nửa liên tục dưới trên X.

b) *Nếu φ và F nửa liên tục trên thì ánh xạ f được xác định bởi*

$$f(x) := \max\{\varphi(x, y) : y \in F(x)\}$$

là nửa liên tục trên trên X.

c) *Nếu φ, F liên tục và F có giá trị compắc thì ánh xạ f được xác định bởi*

$$f(x) := \max\{\varphi(x, y) : y \in F(x)\}$$

liên tục trên X và ánh xạ đa trị

$$S(x) := \{y \in F(x) : \psi(x, y) = f(x)\} = argmax\{\psi(x, y) : y \in F(x)\}$$

từ X vào Y có giá trị compắc, khác rỗng và nửa liên tục trên.

Định lý sau đây là dạng mở rộng của định lý điểm bất động Kakutani (xem [57, Định lý 1.3.5]) từ trường hợp không gian hữu hạn chiều sang không gian vô hạn chiều.

Định lý 1.19 (Định lý điểm bất động Ky Fan, 1972). (Xem [57, Định lý 1.3.4]) *Cho K là tập lồi compắc khác rỗng trong không gian Banach X và $F : K \to 2^K$ là ánh xạ đa trị nửa liên tục trên, có giá trị lồi đóng khác rỗng. Khi đó F có điểm bất động, tức là tồn tại $x^* \in K$ sao cho $x^* \in F(x^*)$.*

1.7 Kết luận

Chương 1 chỉ có tính chất bổ trợ, làm công cụ phục vụ cho các chương sau của luận án. Cụ thể, chương này đã nhắc lại một số khái niệm và các kết quả cần thiết nhất về giải tích hàm, giải tích lồi và giải tích đa trị như: sự hội tụ yếu trong không gian Hilbert, phép chiếu lên tập lồi đóng và các định lý tách tập lồi, tính liên tục của hàm lồi, đạo hàm và dưới vi phân của hàm lồi, cực trị của hàm lồi, và tính liên tục của ánh xạ đa trị.

Chương 2

Sự tồn tại nghiệm và một số cách tiếp cận giải BTCB

Trong chương này, phần đầu tiên giới thiệu BTCB và một số bài toán có thể mô tả được dưới dạng BTCB. Phần thứ hai nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và nêu lên một số tính chất cơ bản của BTCB. Phần cuối trình bày một cách tiếp cận giải BTCB rất quen thuộc, đó là tiếp cận theo nguyên lý bài toán phụ. Nội dung của chương chủ yếu được lấy từ các tài liệu [6, 9, 19, 23, 32] và các công trình 3), 5).

2.1 BTCB và các trường hợp riêng

Cho K là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert $\mathcal{H}$ và song hàm $f : K \times K \to \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in K$; một hàm f như vậy được gọi là hàm cân bằng (*equilibrium bifunction*). Xét bài toán cân bằng

$$\text{Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } f(x^*, y) \geq 0,\ \forall y \in K.$$

Ký hiệu bài toán này là $E(K,f)$ và tập nghiệm của nó là $SE(K,f)$.

Về mặt hình thức BTCB khá đơn giản nhưng nó bao hàm được nhiều lớp bài toán quan trọng thuộc nhiều lĩnh vực khác nhau như bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, điểm bất động Kakutani, điểm yên ngựa, cân bằng Nash, v.v...; nó hợp nhất các bài toán này theo một phương pháp nghiên cứu chung rất tiện lợi. Nhiều kết quả của các bài toán nói trên có thể mở rộng cho BTCB tổng quát với những điều chỉnh phù hợp và do vậy thu được nhiều ứng dụng rộng lớn. Các nhà nghiên cứu cũng đã chỉ ra rằng, nhiều bài toán thực tế như tối ưu, kinh tế và kỹ thuật có thể mô tả được dưới dạng BTCB. Điều đó đã giải thích được vì sao BTCB ngày càng được nhiều người quan tâm.

Sau đây là một số ví dụ điển hình, những bài toán quen thuộc có thể mô tả được dưới dạng BTCB.

2.1.1 Bài toán tối ưu (Optimization problem)

Cho hàm số $\varphi : K \to \mathbb{R}$. Xét bài toán tìm cực tiểu của φ trên K như sau

$$O(K, f): \text{ Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } \varphi(x^*) \leq \varphi(y), \ \forall y \in K.$$

Đặt

$$f(x, y) := \varphi(y) - \varphi(x).$$

Hiển nhiên

$$\varphi(x^*) \leq \varphi(y), \forall y \in K \Leftrightarrow f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in K.$$

Như vậy, bài toán tối ưu là một trường hợp riêng của BTCB.

2.1.2 Bài toán bất đẳng thức biến phân (Variational inequality problem)

Cho $F : K \to \mathcal{H}$ là ánh xạ đơn trị. Bài toán bất đẳng thức biến phân thường hay được xét đến là

$$VI(K, F): \text{Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } \langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Nếu đặt $f(x, y) := \langle F(x), y - x \rangle$ thì dễ thấy rằng, các tập nghiệm của bài toán $VI(K, F)$ và của bài toán $E(K, f)$ là trùng nhau.

Một trường hợp riêng của bài toán $VI(K, F)$ khi K là nón lồi đóng khác rỗng có đỉnh tại 0. Lúc đó bài toán $VI(K, F)$ trở thành bài toán bù (*complementarity problem*)

$$C(K, F): \text{ Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } F(x^*) \in K^*, \langle F(x^*), x^* \rangle = 0,$$

trong đó

$$K^* := \{u \in \mathcal{H} : \langle u, x \rangle \geq 0, \ \forall x \in K\}$$

là nón đối cực của K. Thật vậy, nếu $x^* \in K$ là nghiệm của bài toán $VI(K, F)$ thì

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in K. \tag{2.1}$$

Thay $y = 0$ vào (2.1), ta được

$$\langle F(x^*), -x^* \rangle \geq 0 \text{ hay } \langle F(x^*), x^* \rangle \leq 0. \tag{2.2}$$

Còn nếu thay $y = 2x^*$ vào (2.1) thì

$$\langle F(x^*), x^* \rangle \geq 0. \tag{2.3}$$

Từ (2.2) và (2.3) suy ra

$$\langle F(x^*), x^* \rangle = 0. \tag{2.4}$$

Mặt khác từ (2.1) và (2.4), ta có

$$\langle F(x^*), y \rangle \geq \langle F(x^*), x^* \rangle = 0, \ \forall y \in K,$$

nghĩa là $F(x^*) \in K^*$ theo định nghĩa của nón đối cực. Vậy, x^* là nghiệm của bài toán $C(, K, F)$. Điều ngược lại, mọi nghiệm của bài toán $C(K, F)$ đều là nghiệm của bài toán $VI(K, F)$, là hiển nhiên.

Tổng quát, bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (*multivalued variational inequality*)

$$MVI(K, F) : \begin{cases} \text{Tìm } x^* \in K \text{ và } u^* \in F(x^*) \text{ sao cho} \\ \langle u^*, y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in K, \end{cases}$$

trong đó $F : K \to 2^K$ có giá trị lồi compắc khác rỗng, có thể mô tả được dưới dạng BTCB. Thật vậy, do tập $F(x)$ compắc với mỗi $x \in K$ nên ta có thể đặt

$$f(x, y) := \max_{u \in F(x)} \langle u, y - x \rangle \,, \ \forall x, y \in K.$$

Khi đó, nếu x^* cùng với $u^* \in F(x^*)$ là nghiệm của bài toán $MVI(K, F)$ thì

$$f(x^*, y) = \max_{u \in F(x^*)} \langle u, y - x^* \rangle \geq \langle u^*, y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in K,$$

nghĩa là x^* là nghiệm của bài toán $E(K, f)$. Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của bài toán $E(K, f)$ thì do $F(x^*)$ compắc nên tồn tại $u^* \in F(x^*)$ sao cho

$$\langle u^*, y - x^* \rangle = \max_{u \in F(x^*)} \langle u, y - x^* \rangle = f(x^*, y) \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Chứng tỏ x^* cùng với $u^* \in F(x^*)$ là nghiệm của bài toán $MVI(K,F)$.

Một bài toán quen thuộc, đặc biệt quan trọng là bài toán quy hoạch lồi (*convex programming*)

$$CO(K,f): \ \min\{f(x) : x \in K\},$$

trong đó f là một hàm lồi khả dưới vi phân và liên tục tại một điểm của K. Bài toán này có thể mô tả được dưới dạng bài toán $MVI(K,F)$ với $F = \partial f$. Thật vậy, khi đó bài toán bất đẳng thức biến phân được viết

$$\begin{cases} \text{Tìm } x^* \in K, u^* \in \partial f(x^*) \text{ sao cho} \\ \langle u^*, y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in K. \end{cases}$$

Nếu x^* là nghiệm của bài toán này thì do $u^* \in \partial f(x^*)$, theo định nghĩa dưới vi phân, ta có

$$f(y) - f(x^*) \geq \langle u^*, y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Suy ra $f(y) \geq f(x^*)$ với mọi $y \in K$, nghĩa là x^* là nghiệm của bài toán $CO(K,f)$. Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của $CO(K,f)$ thì theo Định lý 1.14, ta có

$$\begin{aligned} & 0 \in \partial f(x^*) + N_K(x^*) \\ \Rightarrow\ & \partial f(x^*) \cap [-N_K(x^*)] \neq \emptyset \\ \Rightarrow\ & \exists u^* : u^* \in \partial f(x^*) \text{ và } u^* \in -N_K(x^*) \\ \Rightarrow\ & \exists u^* : u^* \in \partial f(x^*) \text{ và } \langle u^*, y - x^* \rangle \geq 0, \ \forall y \in K. \end{aligned}$$

Chứng tỏ x^* cùng với u^* là nghiệm của bài toán $MVI(K, \partial f)$.

Dưới góc độ kinh tế, bài toán $MVI(K,F)$ chính là bài toán tìm phương án sản xuất x^* trong tập chiến lược K (tập các phương án sản xuất) và giá $u^* \in F(x^*)$ ($F(x)$ là tập các giá thành chi phí có thể, ứng với phương án sản xuất x; ở đây F được gọi là là ánh xạ giá) sao cho chi phí là thấp nhất. Trường hợp ánh xạ giá không phụ thuộc vào phương án sản xuất, tức là $F(x) = c = const$ với mọi $x \in K$, bài toán $MVI(K,F)$ trở thành bài toán quy hoạch quen thuộc

$$\min\{\langle c, x \rangle : x \in K\}.$$

Về mặt hình học, bài toán $MVI(K,F)$ là bài toán tìm một điểm $x^* \in K$ sao cho tập $F(x^*)$ có một phần tử là vector pháp tuyến (ngoài) của tập K tại x^*.

2.1.3 Bài toán điểm bất động Kakutani (Kakutani fixed point problem)

Cho $F : K \to K$ là ánh xạ đơn trị. Bài toán điểm bất động thông thường là bài toán

$$F(K, F) : \text{ Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } x^* = F(x^*)$$

Nếu đặt

$$f(x, y) := \langle x - F(x), y - x\rangle$$

thì bài toán $F(K, F)$ và bài toán $E(K, f)$ là tương đương nhau. Thật vậy, nếu x^* là nghiệm của $F(K, F)$ thì

$$f(x^*, y) = \langle x^* - F(x^*), y - x^*\rangle = 0 \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của $E(K, f)$ thì

$$f(x^*, y) = \langle x^* - F(x^*), y - x^*\rangle \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Lấy $y = F(x^*)$, ta được

$$0 \leq \langle x^* - F(x^*), F(x^*) - x^*\rangle = -\|x^* - F(x^*)\|.$$

Suy ra $x^* = F(x^*)$. Nói thêm rằng, theo định lý điểm bất động nổi tiếng Brouwer, mọi ánh xạ liên tục từ một tập compắc vào một tập compắc đều có điểm bất động.

Tổng quát, bài toán điểm bất động đa trị

$$MF(K, F) : \text{ Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } x^* \in F(x^*),$$

trong đó $F : K \to 2^K$ có giá trị lồi compắc khác rỗng, có thể mô tả được dưới dạng BTCB. Thật vậy, do tập $F(x)$ compắc với mỗi $x \in K$ nên ta có thể đặt

$$f(x, y) := \max_{u \in F(x)} \langle x - u, y - x\rangle, \ \forall x, y \in K.$$

Hiển nhiên, nếu $x^* \in F(x^*)$ thì

$$f(x^*, y) = \max_{u \in F(x^*)} \langle x^* - u, y - x^*\rangle \geq \langle x^* - x^*, y - x^*\rangle = 0, \ \forall y \in K.$$

Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của $E(K, f)$, tức là $f(x^*, y) \geq 0$ với mọi $y \in K$. Khi đó, lấy y là hình chiếu của x^* lên $F(x^*)$, ta có

$$\langle x^* - y, y - x^* \rangle = \max_{u \in F(x^*)} \langle x^* - u, u - x^* \rangle .$$

Suy ra

$$0 \leq f(x^*, y) = \langle x^* - y, y - x^* \rangle = -\|x^* - y\|^2.$$

Do đó $x^* = y \in F(x^*)$ nên x^* là điểm bất động của F. Như đã biết, theo định lý điểm bất động Ky Fan, mọi ánh xạ đa trị nửa liên tục trên trên tập lồi compắc khác rỗng và có giá trị lồi đóng khác rỗng đều có điểm bất động.

2.1.4 Bài toán điểm yên ngựa (Saddle point problem)

Cho $C \subseteq \mathbb{R}^n, D \subseteq \mathbb{R}^m$ là các tập lồi đóng khác rỗng và $L : C \times D \to \mathbb{R}$. Xét bài toán điểm yên ngựa

$$\begin{cases} \text{Tìm } (x^*, y^*) \in C \times D \text{ sao cho} \\ L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*), \ \forall (x, y) \in C \times D. \end{cases} \tag{2.5}$$

Một nghiệm $(x^*, y^*) \in C \times D$ của bài toán (2.5) được gọi là một điểm yên ngựa của L trên $C \times D$. Ta sẽ chỉ ra rằng, bài toán điểm yên ngựa có thể mô tả dưới dạng BTCB. Thật vậy, với mỗi $u = (x', y'), v = (x, y)$, đặt

$$K := C \times D, \ f(u, v) := L(x, y') - L(x', y).$$

Khi đó, nếu $u^* = (x^*, y^*)$ là nghiệm của BTCB $E(K, f)$, tức là

$$u^* \in K : \ f(u^*, v) \geq 0, \forall v \in K,$$

thì

$$L(x^*, y) \leq L(x, y^*), \ \forall (x, y) \in K.$$

Lần lượt thay $x = x^*$ và $y = y^*$ vào bất đẳng thức này, ta nhận được

$$L(x^*, y) \leq L(x^*, y^*) \leq L(x, y^*), \ \forall (x, y) \in K.$$

Vậy (x^*, y^*) là điểm yên ngựa của L trên K. Điều ngược lại dễ dàng suy ra từ định nghĩa.

2.1.5 Bài toán cân bằng Nash trong trò chơi không hợp tác (Nash equilibria problem in noncooperative games)

Để thấy được khái niệm BTCB xuất phát từ đâu, xét một trò chơi không hợp tác gồm hai đấu thủ (người chơi). Gọi $K_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}, K_2 \subseteq \mathbb{R}^{n_2}$ $(n_1, n_2 \in \mathbb{N})$ là các tập lồi đóng khác rỗng và là tập chiến lược của đấu thủ 1, 2 tương ứng. Cặp phương án (x, y) gọi là chấp nhận được nếu $(x, y) \in K_1 \times K_2$. Giả sử $L_1, L_2 : K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ là hàm lợi ích của các đấu thủ 1, 2 tương ứng, nghĩa là, nếu đấu thủ 1 chọn phương án chơi $x \in K_1$ và đấu thủ 2 chọn phương án chơi $y \in K_2$ thì đấu thủ 1 nhận lợi ích là $L_1(x, y)$ và đấu thủ 2 nhận lợi ích là $L_2(x, y)$. Lẽ tự nhiên là mỗi đấu thủ đều muốn chọn phương án chơi sao cho lợi ích của mình là lớn nhất. Điều này dẫn đến khái niệm điểm cân bằng được định nghĩa như sau: Ta gọi $(x^*, y^*) \in K_1 \times K_2$ là điểm cân bằng của trò chơi nếu

$$L_1(x^*, y^*) = \max_{x \in K_1} L_1(x, y^*) \;\text{ và }\; L_2(x^*, y^*) = \max_{y \in K_2} L_2(x^*, y).$$

Như vậy điểm cân bằng của trò chơi là một cặp phương án chấp nhận được, tại đó lợi ích của mỗi đấu thủ là cao nhất. Thông thường người ta giả sử

$$L_1(x, y) + L_2(x, y) = 0, \; \forall x \in K_1, \forall y \in K_2.$$

Giả thiết này có nghĩa là lợi ích của đấu thủ này đúng bằng thua thiệt của đối thủ kia. Vì vậy có thể coi

$$L_1(x, y) := -L(x, y) \;\text{ và }\; L_2(x, y) := L(x, y).$$

Có thể thấy rằng, (x^*, y^*) là điểm cân bằng của trò chơi khi và chỉ khi nó là điểm yên ngựa của hàm giá trị của trò chơi $L(x, y)$, nghĩa là

$$(x^*, y^*) \in K_1 \times K_2 : \; L(x^*, y) \le L(x^*, y^*) \le L(x, y^*), \forall (x, y) \in K_1 \times K_2.$$

Vì vậy, như ở mục trước đã cho thấy, có thể mô tả bài toán trò chơi không hợp tác gồm hai đấu thủ dưới dạng BTCB.

Tổng quát, xét trò chơi có p người chơi. Giả sử $K_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ $(i \in J := \{1, .., p\},\ n_i \in \mathbb{N})$ là tập lồi đóng khác rỗng và là tập chiến lược của người chơi thứ $i \in J$ - tập phương án mà đấu thủ thứ i có thể lựa chọn trong đó; $L_i : K := K_1 \times ... \times K_p \to \mathbb{R}$ là hàm lợi ích của người chơi thứ $i \in J$, trong đó $L_i(x_1,...,x_i,...,x_p)$ là lợi ích của người chơi thứ i khi người chơi này chọn phương án chơi $x_i \in K_i$, còn những người chơi khác chọn phương án chơi $x_j \in K_j$ với mọi $j \neq i$. Ta gọi $x^* = (x_1^*,...,x_i^*,...,x_p^*)$ là điểm cân bằng của $L := (L_1,...,L_i,...,L_p)$ trên K nếu với mọi $i \in J$ và mọi $y_i \in K_i$, ta có

$$L_i(x_1^*,...,y_i,...,x_p^*) \leq L_i(x_1^*,...,x_i^*,...,x_p^*).$$

BTCB Nash là bài toán tìm điểm cân bằng của L trên K, ký hiệu bài toán này là $NE(K,L)$. Bài toán $NE(K,L)$ có thể mô tả dưới dạng BTCB $E(K,f)$, trong đó $f : K \times K \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x,y) := \sum_{i=1}^{p} \big[L_i(x_1,...,x_i,...,x_p) - L_i(x_1,...,y_i,...,x_p)\big].$$

Thật vậy, nếu x^* là một điểm cân bằng Nash thì dễ thấy $f(x^*,y) \geq 0$ với mọi $y \in K$. Ngược lại, nếu x^* là một nghiệm của bài toán $E(K,f)$ thì ta phải chứng tỏ x^* là một điểm cân bằng Nash của L trên K. Giả sử trái lại, sẽ tồn tại $j \in J$ và $y_j \in K_i$ sao cho

$$L_j(x_1^*,...,y_j,...,x_p^*) > L_j(x_1^*,...,x_j^*,...,x_p^*).$$

Khi đó với phương án $y = (x_1^*,...,y_j,...,x_p^*)$, theo định nghĩa hàm f, ta có

$$f(x^*,y) = L_j(x_1^*,...,x_j^*,...,x_p^*) - L_j(x_1^*,...,y_j,...,x_p^*) < 0$$

mâu thuẫn với việc x^* là nghiệm của bài toán $E(K,f)$.

Nhận xét 2.1.1. Trong tất cả các bài toán nói trên, song hàm f đều có chung tính chất $f(x,x) = 0$ với mọi $x \in K$. Như vậy f là hàm cân bằng.

2.2 Sự tồn tại nghiệm và một số tính chất cơ bản của BTCB

Trong phần này ta sẽ xét đến sự tồn tại nghiệm, tính duy nhất nghiệm và một số tính chất cơ bản của BTCB và bài toán đối ngẫu của nó.

Giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert với một tôpô τ nào đó. Để thuận tiện về mặt trình bày, từ đây về sau ta cần đến những giả thiết sau đây

(A_1) $f(.,y)$ nửa liên tục trên (theo tôpô τ) với mỗi $y \in K$.

(A_2) $f(x,.)$ nửa liên tục dưới (theo tôpô τ) và lồi với mỗi $x \in K$.

(A_3) *Điều kiện bức*: Tồn tại một tập $B \subset \mathcal{H}$ compắc (theo tôpô τ) và một vector $y^0 \in B \cap K$ sao cho

$$f(x, y^0) < 0, \ \forall x \in K \backslash B.$$

Định lý 2.1 (**Bất đẳng thức Ky Fan, 1972 [19]**). *Cho K là tập lồi compắc khác rỗng trong không gian Banach X. Giả sử $f : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm cân bằng thỏa giả thiết (A_1) và $f(x,.)$ tựa lồi trên K với mọi $x \in K$. Khi đó BTCB $E(K,f)$ có nghiệm.*

Sau đây, ta giới thiệu các định nghĩa về tính đơn điệu của song hàm và toán tử.

Định nghĩa 2.2.1. Cho $K \subseteq \mathcal{H}$. Song hàm $f : K \times K \to \mathbb{R}$ được gọi là

a) đơn điệu mạnh (*strongly monotone*) trên K với hệ số $\gamma > 0$, nếu

$$f(x,y) + f(y,x) \le -\gamma \|x - y\|^2, \ \forall x, y \in K;$$

b) đơn điệu chặt (*strictly monotone*) trên K, nếu

$$f(x,y) + f(y,x) < 0, \ \forall x, y \in K : x \neq y;$$

c) đơn điệu (*monotone*) trên K, nếu

$$f(x,y) + f(y,x) \le 0, \ \forall x, y \in K;$$

d) giả đơn điệu (*pseudomonotone*) trên K, nếu

$$f(x,y) \ge 0 \Rightarrow f(x,y) \le 0, \ \forall x, y \in K;$$

e) tựa đơn điệu (*quasimonotone*) trên K, nếu

$$f(x,y) > 0 \Rightarrow f(x,y) \le 0, \ \forall x, y \in K.$$

Định nghĩa 2.2.2. Một toán tử đa trị $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ với $K \subseteq domF$ được gọi là

a) đơn điệu mạnh trên K với hệ số $\gamma > 0$, nếu

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq \gamma\|x - y\|^2,\ \forall x, y \in K,\ \forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y);$$

b) đơn điệu chặt trên K, nếu

$$\langle u - v, x - y\rangle > 0,\ \forall x, y \in K : x \neq y,\ \forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y);$$

c) đơn điệu trên K, nếu

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq 0,\ \forall x, y \in K,\ \forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y);$$

d) giả đơn điệu trên K, nếu

$$\langle u, y - x\rangle \geq 0 \Rightarrow \langle v, x - y\rangle \leq 0,\ \forall x, y \in K,\ \forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y);$$

e) tựa đơn điệu trên K, nếu

$$\langle u, y - x\rangle > 0 \Rightarrow \langle v, x - y\rangle \leq 0,\ \forall x, y \in K,\ \forall u \in F(x),\ \forall v \in F(y).$$

Nhận xét 2.2.1. Nếu F là toán tử đa trị có một trong các tính chất đơn điệu mạnh, đơn điệu chặt, đơn điệu, giả đơn điệu hay tựa đơn điệu và F có giá trị compắc trên K thì hàm

$$f(x, y) := \max_{u \in F(x)} \langle u, y - x\rangle$$

tương ứng sẽ là đơn điệu mạnh, đơn điệu chặt, đơn điệu, giả đơn điệu hay tựa đơn điệu trên K. Thật vậy, giả sử F đơn điệu trên K (các trường hợp đơn điệu khác được chứng minh tương tự). Do $F(x), F(y)$ compắc với mọi $x, y \in K$ nên tồn tại $u \in F(x), v \in F(y)$ sao cho

$$f(x, y) = \langle u, y - x\rangle \text{ và } f(y, x) = \langle v, x - y\rangle.$$

Khi đó bởi F đơn điệu nên

$$f(x, y) + f(y, x) = \langle u - v, y - x\rangle \leq 0.$$

Điều đó chứng tỏ f đơn điệu trên K.

Một ví dụ quan trọng của toán tử đa trị đơn điệu là dưới vi phân của hàm lồi. Thật vậy, giả sử $h : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ là hàm lồi chính thường khả dưới vi phân. Khi đó với mọi $u \in \partial h(x), v \in \partial h(y)$, theo định nghĩa dưới vi phân, ta có

$$h(y) - h(x) \geq \langle u, y - x \rangle \text{ và } h(x) - h(y) \geq \langle v, x - y \rangle .$$

Cộng vế theo vế hai bất đẳng thức nói trên, ta được

$$\langle u - v, x - y \rangle \geq 0.$$

Vậy $\partial h : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ đơn điệu trên $\mathcal{H}$.

Một ví dụ về hàm cân bằng đơn điệu mạnh, sẽ được sử dụng nhiều trong luận án, là hàm khoảng cách được xác định bởi

$$g(x, y) := \varepsilon \langle x - x^g, y - x \rangle , \ \forall x, y \in \mathcal{H}$$

trong đó $\varepsilon > 0$ và $x^g \in \mathcal{H}$ cho trước. Với hằng số $\gamma > 0$ nào đó thỏa $\gamma \leq \varepsilon$, ta có

$$\begin{aligned} g(x, y) + g(y, x) &= \varepsilon \langle x - x^g, y - x \rangle + \varepsilon \langle y - x^g, x - y \rangle \\ &= \varepsilon \langle -(x - x^g) + (y - x^g), x - y \rangle \\ &= -\varepsilon \|x - y\|^2 \leq -\gamma \|x - y\|^2, \ \forall x, y \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Chứng tỏ g đơn điệu mạnh với hệ số γ trên $\mathcal{H}$.

Nhận xét 2.2.2. Từ các Định nghĩa 2.2.1 và 2.2.2, có thể thấy rằng

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e).$$

Chiều ngược lại của hệ thức không phải bao giờ cũng đúng như ta thấy qua các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2.2.1. Hàm $f(x, y) = \sqrt{x}(y - x)$ đơn điệu chặt trên $K = [1, +\infty)$, vì

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, x) &= \sqrt{x}(y - x) + \sqrt{y}(x - y) \\ &= -\frac{(x - y)^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} < 0, \ \forall x, y \in K : x \neq y. \end{aligned}$$

Giả sử f đơn điệu mạnh trên K, tức là tồn tại hằng số $\gamma > 0$ sao cho

$$f(x, y) + f(y, x) = -\frac{(x - y)^2}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \leq -\gamma (x - y)^2, \ \forall x, y \in K. \tag{2.6}$$

Lấy $x = 4n^2, y = n^2 \in K$ $(n \in \mathbb{N})$ thay vào (2.6), ta được

$$-\frac{1}{3n} \leq -\gamma \Leftrightarrow n \leq \frac{1}{3\gamma}.$$

Chỉ cần chọn $n > \frac{1}{3\gamma}$ thì bất đẳng thức (2.6) không còn đúng nữa, vì vậy, f sẽ không đơn điệu mạnh trên K.

Ví dụ 2.2.2. Xét hàm số

$$f(x,y) = \begin{cases} x^3(y-x) & \text{nếu } x \geq 0 \text{ và } y \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \text{ hoặc } y < 0. \end{cases}$$

Ta có

$$f(x,y) + f(y,x) = \begin{cases} -(x^2+xy+y^2)(x-y)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \text{ và } y \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \text{ hoặc } y < 0. \end{cases}$$

Qua đó có thể thấy rằng, f là đơn điệu nhưng không đơn điệu chặt trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2.2.3. Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, hàm số $f(x,y) = \frac{3}{\varepsilon}(x^2+2)(y-x)$ là giả đơn điệu nhưng không đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} & f(x,y) = \frac{3}{\varepsilon}(x^2+2)(y-x) \geq 0 \\ & \Rightarrow y - x \geq 0 \Rightarrow x - y \leq 0 \\ & \Rightarrow f(y,x) = \frac{3}{\varepsilon}(y^2+2)(x-y) \leq 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Chứng tỏ f giả đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Mặt khác, ta thấy

$$f(x,y) + f(y,x) = -\frac{3}{\varepsilon}[(x+y)(x-y)^2].$$

Chỉ cần chọn x và y sao cho $x + y < 0$ và $x - y \neq 0$ thì $f(x,y) + f(y,x) > 0$, nghĩa là f không đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Ví dụ 2.2.4. Xét hàm số $f(x,y) = y^2(y-x)$ trên $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ta có

$$f(x,y) > 0 \Rightarrow y > x \text{ và } y \neq 0 \Rightarrow f(y,x) = x^2(x-y) \leq 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Điều đó chứng tỏ f tựa đơn điệu nhưng

$$f(1,0) = 0 \text{ và } f(0,1) = 1 > 0$$

nên f không giả đơn điệu trên $\mathbb{R}$.

Nhận xét 2.2.3. Tổng của một hàm đơn điệu và một hàm đơn điệu mạnh là đơn điệu mạnh. Thật vậy, giả sử $f : K \times K \to \mathbb{R}$ đơn điệu và $g : K \times K \to \mathbb{R}$ đơn điệu mạnh với hệ số γ, nghĩa là

$$\begin{cases} f(x,y) + f(y,x) \leq 0, \\ g(x,y) + g(y,x) \leq -\gamma\|x-y\|^2, \end{cases} \quad \forall x, y \in K.$$

Khi đó

$$\begin{aligned} (f+g)(x,y) + (f+g)(y,x) &= [f(x,y) + g(x,y)] + [f(y,x) + g(y,x)] \\ &= [f(x,y) + f(y,x)] + [g(x,y) + g(y,x)] \\ &\leq -\gamma\|x-y\|^2, \ \forall x, y \in K. \end{aligned}$$

Chứng tỏ $f + g$ đơn điệu mạnh với hệ số γ trên K.

Tuy nhiên, tổng của một hàm giả đơn điệu và một hàm đơn điệu mạnh không chắc là đơn điệu mạnh, thậm chí là không giả đơn điệu, như ta thấy ở ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.2.5. Cho ε là một số dương tùy ý, $K = [-3, +\infty)$ và

$$f(x,y) = \frac{\varepsilon}{3}(x^2+2)(y-x), \ g(x,y) := \varepsilon x(y-x).$$

Có thể thấy rằng, hàm g đơn điệu mạnh theo ví dụ trong Nhận xét 2.2.1 và hàm f giả đơn điệu theo Ví dụ 2.2.3. Tuy nhiên

$$f_\varepsilon(x,y) := f(x,y) + g(x,y) = \frac{\varepsilon}{3}\left[(x^2+3x+2)(y-x)\right]$$

là không giả đơn điệu. Thực vậy, với $x \in (-2,-1), y \in [-3,-2)$, ta có

$$f_\varepsilon(x,y) > 0 \text{ và } f_\varepsilon(y,x) > 0.$$

BTCB $E(K,f)$ có mối quan hệ chặt chẽ với bài toán sau đây, được gọi là bài toán đối ngẫu (*dual problem*) của nó,

$$E^d(K,f): \text{ Tìm } x^* \in K \text{ sao cho } f(y,x^*) \leq 0, \ \forall y \in K.$$

Ký hiệu tập nghiệm của bài toán $E^d(K,f)$ là $SE^d(K,f)$.

Các định lý sau đây rất cần thiết cho việc chứng minh các kết quả chính trong các chương sau của luận án.

Định lý 2.2. (Xem [6, Propositions 3.1, 3.2, 4.1]) *Cho $K \subseteq \mathcal{H}$ là tập lồi đóng khác rỗng và $f : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm cân bằng. Khi đó*

a) *Nếu giả thiết (A_2) được thỏa thì $SE^d(K, f)$ là tập lồi đóng.*

b) *Nếu các giả thiết $(A_1), (A_2)$ được thỏa thì $SE^d(K, f) \subseteq SE(K, f)$. Hơn nữa, nếu f giả đơn điệu trên K thì $SE^d(K, f) = SE(K, f)$.*

c) *Nếu các giả thiết $(A_1), (A_2), (A_3)$ được thỏa thì $SE(K, f) \neq \emptyset$. Hơn nữa, nếu f giả đơn điệu trên K thì $SE(K, f)$ là tập compắc.*

Nhận xét 2.2.4. Đặt

$$L(y, f) := \{x \in K : f(x, y) \geq 0\} \text{ và } L^d(y, f) := \{x \in K : f(y, x) \leq 0\}.$$

Dễ thấy rằng

$$\cap_{y \in K} L(y, f) = SE(K, f) \text{ và } \cap_{y \in K} L^d(y, f) = SE^d(K, f).$$

Trong khẳng định b) của định lý trên, giả thiết tính giả đơn điệu của f cho thấy $L(y, f) \subseteq L^d(y, f)$. Suy ra $SE(K, f) \subseteq SE^d(K, f)$ và vì vậy $SE(K, f) = SE^d(K, f)$. Nói chung, khi f không giả đơn điệu thì điều đó không còn đúng nữa như ta thấy qua ví dụ sau.

Ví dụ 2.2.6. Theo Ví dụ 2.2.4, hàm số $f(x, y) = y^2(y - x)$ không giả đơn điệu trên $\mathbb{R}$. Dễ thấy rằng

$$L(0, f) = \mathbb{R} \text{ và } L^d(0, f) = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

Chứng tỏ $L(y, f) \nsubseteq L^d(y, f)$.

Định lý sau đây đã được chứng minh trong trường hợp không gian hữu hạn chiều (xem [23, Proposition 2.1.16]). Bây giờ, ta sẽ mở rộng nó vào trường hợp không gian vô hạn chiều.

Định lý 2.3. *Cho $K \subseteq \mathcal{H}$ là tập lồi đóng khác rỗng và $f : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm cân bằng. Khi đó*

a) *Nếu f đơn điệu chặt trên K thì BTCB $E(K, f)$ có nhiều nhất một nghiệm.*

b) *Nếu f đơn điệu mạnh trên K và thỏa các giả thiết $(A_1), (A_2)$ thì BTCB $E(K, f)$ luôn có duy nhất nghiệm.*

Chứng minh. a) Giả sử bài toán $EP(K, f)$ có hai nghiệm x^1 và x^2. Khi đó $f(x^1, x^2) \geq 0$ và $f(x^2, x^1) \geq 0$. Nếu $f(x^1, x^2) \geq 0$ thì do tính đơn điệu chặt của f suy ra $f(x^2, x^1) < 0$. Mâu thuẫn này chứng tỏ bài toán $E(K, f)$ có nhiều nhất một nghiệm.

b) Bởi tính đơn điệu mạnh suy ra tính đơn điệu chặt nên theo a), ta chỉ cần chứng minh bài toán $E(K, f)$ có nghiệm. Hơn nữa, theo Định lý 2.2.c), ta chỉ cần chỉ ra bài toán $E(K, f)$ thỏa mãn điều kiện bức (A_3). Giả sử ngược lại, kết luận này không đúng, nghĩa là, với mọi hình cầu đóng $B_r := \overline{B}(0, r)$ tâm 0 bán kính r, tồn tại $x^r \in K \backslash B_r$ sao cho

$$f(x^r, y) \geq 0, \ \forall y \in K \cap B_r.$$

Lấy $r = r_0$ và $y^0 \in K \cap B_r$ nào đó. Khi đó

$$f(x^r, y^0) \geq 0, \ \forall r > r_0. \tag{2.7}$$

Đặt $t := \frac{1}{\|x^r - y^0\|}$. Khi đó $x := tx^r + (1-t)y^0 \in S(y^0, 1) \cap K$, trong đó $S(y^0, 1)$ là mặt cầu tâm y^0 bán kính 1. Vì tính lồi của $f(y^0, .)$ nên

$$f(y^0, x) \leq tf(y^0, x^r) + (1-t)f(y^0, y^0) = tf(y^0, x^r). \tag{2.8}$$

Từ đây và do f đơn điệu mạnh với hệ số γ trên K nên

$$f(y^0, x^r) \leq -f(x^r, y^0) - \gamma\|x^r - y^0\|^2. \tag{2.9}$$

Từ (2.7), (2.8) và (2.9) suy ra

$$f(y^0, x) \leq -\gamma t\|x^r - y^0\|^2 \leq -\gamma\|x^r - y^0\| \leq -\gamma r, \ \forall r > r_0.$$

Vì vậy

$$f(y^0, x) \to -\infty \text{ khi } r \to +\infty.$$

Điều này mâu thuẫn với việc $f(y^0, .)$ đạt giá trị cực tiểu trên tập compắc $S(y^0, 1) \cap K$ bởi tính nửa liên tục dưới của nó trên K. Do đó, bài toán $E(K, f)$ thỏa mãn điều kiện bức (A_3). $\square$

Định lý 2.4. *Giả sử f thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$. Xét các khẳng định sau sau đây:*

a) *Tồn tại một vector $y^0 \in K$ sao cho tập*

$$L(y^0, f) := \{x \in K : f(x, y^0) \geq 0\}$$

bị chặn.

b) *Tồn tại một tập compắc $B \subset \mathcal{H}$ và một vector $y^0 \in K \cap B$ sao cho*

$$f(x, y^0) < 0, \forall x \in K \setminus B.$$

c) *Tập nghiệm $SE(K, f)$ của bài toán $E(K, f)$ là compắc và khác rỗng.*

Khi đó, ta có

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c).$$

Hơn nữa, nếu f giả đơn điệu trên K thì $SE(K, f)$ lồi và tập

$$L_{>}(y^0, f) := \{x \in K : f(x, y^0) > 0\} = \emptyset$$

với $y^0 \in SE(K, f)$ bất kỳ.

Chứng minh. a) $\Rightarrow$ b): Vì $L(y^0, f)$ bị chặn nên có thể lấy $B \subset \mathcal{H}$ là một tập compắc nào đó chứa $L(y^0, f)$. Rõ ràng

$$\{x \in K \setminus B : f(x, y^0) \geq 0\} = \emptyset.$$

Từ đó ta nhận được b).

b) $\Rightarrow$ c): Suy từ định lý 2.2.c).

Để chứng minh khẳng định cuối, lấy bất kỳ $y^0 \in SE(K, f)$. Khi đó $f(y^0, x) \geq 0$ với mọi $x \in K$. Do tính giả đơn điệu của f nên $f(x, y^0) \leq 0$ với mọi $x \in K$. Vì vậy $L_{>}(y^0, f) = \emptyset$. □

2.3 Một số cách tiếp cận giải BTCB

Vấn đề giải BTCB là một đề tài hấp dẫn, thu hút sự quan tâm của nhiều người, bởi như ta thấy, nhiều bài toán quan trọng, nhiều mô hình thực tế, trong đó có các bài toán rất khó về mặt tính toán chẳng hạn như bài toán tìm điểm bất động Kakutani, đều có thể quy về dạng BTCB. Có nhiều cách tiếp cận giải BTCB như tiếp cận dựa trên phương pháp điểm bất động và tiếp cận theo tối ưu hóa dựa trên kỹ thuật hàm đánh giá [40, 43]; tiếp cận theo nguyên lý bài toán phụ [32, 33, 42]; tiếp cận theo phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề [25, 27, 34, 39].

Phương pháp giải một bài toán thông qua bài toán phụ là một trong những phương pháp được sử dụng phổ biến cho hầu hết các bài toán trong mọi lĩnh vực. Để dễ hình dung phương pháp này, trong mục này, chúng ta sẽ trình bày phương pháp nguyên lý bài toán phụ giải BTCB theo cách tiếp cận điểm bất động dựa trên tài liệu [33]. Các chương sau sẽ trình bày các kết quả mà chúng tôi đã đạt được khi sử dụng phương pháp nói trên cho BTCB với cách tiếp cận theo phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề.

Nguyên lý bài toán phụ được đề xuất bởi G. Cohen [13] cho bài toán bất đẳng thức biến phân và được G. Mastroeni [33] mở rộng vào BTCB. Để áp dụng phương pháp này giải BTCB, người ta thay thế bài toán quy hoạch lồi tương đương với BTCB đã cho (không nhất thiết tồn tại và duy nhất nghiệm) bằng các bài toán quy hoạch lồi mạnh (luôn có duy nhất nghiệm); các bài toán quy hoạch lồi mạnh này đóng vai trò như một bài toán phụ trong phương pháp giải. Bổ đề và định lý sau đây là cơ sở để xây dựng phương pháp.

Bổ đề 2.5. (Xem [33, Lemma 2.1]) *Cho $K \subseteq \mathcal{H}$ là tập lồi đóng khác rỗng và $f : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm cân bằng. Khi đó các khẳng định sau đây là tương đương nhau:*

a) *$x^* \in K$ là nghiệm của BTCB $E(K, f)$.*

b) *$x^* \in argmin\{f(x^*, y) : y \in K\}$ (dạng điểm bất động).*

Định lý sau đây đã được chứng minh bởi G.Mastroeni [33] trong trường hợp $f(x^*, .) : K \to \mathbb{R}$ khả vi. Bây giờ chúng ta sẽ chứng minh cho trường hợp $f(x^*, .)$ khả dưới vi phân và liên tục tại một điểm nào đó của K.

Định lý 2.6. *Cho $K \subseteq \mathcal{H}$ là tập lồi đóng khác rỗng và $x^* \in K$. Giả sử rằng*

i) *$f(x^*, .) : K \to \mathbb{R}$ lồi, khả dưới vi phân trên K và liên tục tại một điểm nào đó của K;*

ii) $R : K \times K \to \mathbb{R}$ *là hàm không âm,* $R(x,.)$ *khả vi với mỗi* $x \in K$ *và thỏa mãn các điều kiện*

$$R(x,x) = 0,\ \nabla_2 R(x,x) = 0,\ \forall x \in K.$$

Khi đó $x^* \in K$ *là nghiệm của bài toán* $E(K,f)$ *nếu và chỉ nếu nó là nghiệm của bài toán phụ*

$$E(K,f_\mu) : \begin{cases} \textit{Tìm } x^* \in K \textit{ sao cho} \\ f_\mu(x^*,y) := \mu f(x^*,y) + R(x^*,y) \geq 0,\ \forall y \in K, \end{cases}$$

trong đó $\mu > 0$ *được gọi là tham số hiệu chỉnh.*

Chứng minh. Do R là hàm không âm nên dễ thấy rằng, nếu x^* là nghiệm của $E(K,f)$ thì nó sẽ là nghiệm của $E(K,f_\mu)$. Ngược lại, nếu x^* là nghiệm của $E(K,f_\mu)$ thì x^* là nghiệm bài toán quy hoạch lồi

$$\min\{\mu f(x^*,y) + R(x^*,y) : y \in K\},$$

theo Bổ đề 2.5. Từ các giả thiết của định lý có thể thấy rằng, $f_\mu(x^*,.)$ khả dưới vi phân trên K và liên tục tại một điểm của K. Theo Định lý 1.14 và điều kiện $\nabla_2 R(x,x) = 0$ với mọi $x \in K$, ta có

$$\begin{aligned} & 0 \in \partial_2 f_\mu(x^*,x^*) + N_K(x^*) = \partial_2 f(x^*,x^*) + N_K(x^*) \\ \Rightarrow\ & \exists u^* \in \mathcal{H} : u^* \in \partial_2 f(x^*,x^*) \text{ và } u^* \in -N_K(x^*) \\ \Rightarrow\ & \begin{cases} f(x^*,y) = f(x^*,y) - f(x^*,x^*) \geq \langle u^*, y - x^* \rangle \\ \langle u^*, y - x^* \rangle \geq 0, \forall y \in K. \end{cases} \end{aligned}$$

Chứng tỏ x^* là nghiệm của bài toán $E(K,f)$. □

Từ Bổ đề 2.5 và Định lý 2.6, sử dụng dạng điểm bất động, ta có thuật toán tổng quát giải bài toán $E(K,f)$ như sau: Tại mỗi bước lặp $k = 0,1,2,...$, giả sử đã có $x^k \in K$. Xây dựng dãy lặp theo quy tắc

$$x^{k+1} = S(x^k) := argmin\{f_{\mu_k}(x^k,y) : y \in K\}. \tag{2.10}$$

Chú ý rằng, nếu hàm f lồi, khả dưới vi phân, liên tục theo biến thứ hai và R là hàm lồi mạnh khả vi theo biến thứ hai trên tập lồi K thì bài toán (2.10) có duy nhất nghiệm, vì vậy, x^{k+1} được xác định. Nếu $x^{k+1} = x^k$ thì x^k là nghiệm của bài toán phụ $E(K, f_{\mu_k})$ và do đó cũng là nghiệm của bài toán $E(K, f)$. Nếu trường hợp này không bao giờ xảy ra thì quá trình lặp sẽ kéo đến vô hạn và nó sẽ tạo ra một dãy vô hạn $\{x^k\}$ thuộc tập K. Câu hỏi đặt ra là, với những điều kiện nào thì dãy này sẽ hội tụ đến nghiệm của bài toán gốc $E(K, f)$?

Phần tiếp theo sẽ cho ta thấy, có thể áp dụng thuật toán tổng quát vào bài toán phụ $E(K, f_\mu)$ bằng cách chọn hàm R thích hợp sao cho bài toán phụ có duy nhất nghiệm và dãy vô hạn được sinh ra bởi thuật toán tổng quát hội tụ đến nghiệm của bài toán gốc, chẳng hạn chọn R là hàm khoảng cách Bregman:

$$R(x, y) := G(y) - G(x) + \langle \nabla G(x), y - x \rangle$$

trong đó $G : K \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi, lồi mạnh. Định lý sau đây đề cập đến sự hội tụ của thuật toán tổng quát.

Định lý 2.7. (Xem [33, Theorem 3.1]) *Giả sử rằng*

i) *$f : K \times K \to \mathbb{R}$ đơn điệu mạnh với hằng số $\alpha > 0$ trên K; $f(x, .)$ lồi, khả vi với mọi $x \in K$; $f(., y)$ liên tục với mọi $y \in K$;*

ii) *G lồi mạnh với hằng số $\beta > 0$ và khả vi trên K;*

iii) *tồn tại các hằng số $c > 0$ và $d > 0$ sao cho*

$$f(x, y) + f(y, z) \geq f(x, z) - c\|y - x\|^2 - d\|x - y\|^2, \ \forall x, y, z \in K.$$

Khi đó, nếu $\mu \leq \frac{\beta}{2d}$ và $c < \alpha$ thì dãy $\{x^k\}$ sinh bởi thuật toán tổng quát hội tụ về nghiệm x^* của bài toán gốc $E(K, f)$.

Trong tài liệu [39], Muu-Quoc đã xét đến một trường hợp riêng của định lý này khi lấy $R(x, y) := \frac{1}{2}\|x - y\|^2$ và đã xác định được tốc độ hội tụ tuyến tính của thuật toán tổng quát.

2.4 Kết luận

Trong Chương 2, trước tiên, chúng ta đã giới thiệu BTCB và để thấy được ý nghĩa của bài toán này, ta đã đưa ra một số ví dụ, đó chính là những bài toán quen thuộc, các mô hình toán kinh tế có thể mô tả được dưới dạng BTCB, đồng thời phân tích khá kỹ lưỡng mối quan hệ giữa các bài toán này.

Phần tiếp theo nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và nêu lên một số tính chất cơ bản của BTCB; chúng ta đã trình bày các điều kiện để bài toán khi nào có nghiệm, có duy nhất nghiệm cũng như mô tả cấu trúc của tập nghiệm của bài toán dưới các điều kiện đó.

Cuối cùng, chúng ta giới thiệu một số cách tiếp cận giải BTCB và trình bày một cách tiếp cận rất quen thuộc cho việc giải nhiều lớp bài toán, đó là tiếp cận theo nguyên lý bài toán phụ.

Chương 3

Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cho BTCB trong không gian Euclide

Chương này, phần đầu tiên đưa ra các khái niệm về bài toán đặt không chỉnh và giới thiệu phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov áp dụng cho phương trình toán tử và bài toán bất đẳng thức biến phân. Phần chính của chương trình bày việc mở rộng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov vào BTCB đặt không chỉnh trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$. Phần cuối của chương áp dụng các kết quả cho BTCB nói trên vào bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị. Nội dung của chương được lấy từ tài liệu [52] và các công trình 1), 3) và 4).

Trong chương này, ta luôn giả thiết K là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ và $f : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm cân bằng.

3.1 Bài toán đặt không chỉnh và phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov

3.1.1 Khái niệm về bài toán đặt chỉnh và đặt không chỉnh

Chúng ta bắt đầu phần này với lời giới thiệu trong tài liệu [52]: "Nhiều vấn đề khoa học, công nghệ, kinh tế, sinh thái, v.v... dẫn đến việc giải các bài toán mà nghiệm của chúng không ổn định theo dữ kiện ban đầu, tức là một thay đổi nhỏ của các dữ liệu có thể dẫn đến sự sai khác rất lớn của nghiệm, thậm chí làm cho bài toán trở nên vô nghiệm hoặc vô định. Người ta gọi những bài toán đó là những bài toán đặt không chỉnh. Do các số liệu thường được thu thập bằng thực nghiệm và sau đó lại được xử lý trên máy tính nên chúng không tránh khỏi sai số. Chính vì thế, ta cần phải có những phương pháp giải ổn định các bài toán đặt không chỉnh, sao cho khi sai số của dữ liệu càng nhỏ thì nghiệm xấp xỉ tìm được càng gần với nghiệm đúng của bài toán xuất phát.".

Việc tìm nghiệm x của bất kỳ bài toán nào cũng phải dựa vào dữ kiện ban đầu b, có nghĩa là $x = R(b)$. Ta coi nghiệm x cũng như dữ kiện b là những phần tử thuộc không gian metric X và Y với các hàm khoảng cách ρ_X và ρ_Y, tương ứng.

Định nghĩa 3.1.1 (J. Hadamard). Bài toán tìm nghiệm $x \in X$ theo dữ kiện $b \in Y$ được gọi là bài toán đặt chỉnh (*well-posed problem)*, nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau

a) Với mỗi $b \in Y$ tồn tại nghiệm $x \in X$.

b) Nghiệm x đó được xác định duy nhất.

c) Bài toán này ổn định trên (X, Y), nghĩa là

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \rho_Y(b_1, b_2) \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \rho_X(x_1, x_2) < \varepsilon,$$

ở đây

$$x_1 = R(b_1),\ x_2 = R(b_2),\ x_1, x_2 \in X,\ b_1, b_2 \in Y.$$

Nếu ít nhất một trong điều kiện trên không thỏa mãn thì bài toán được gọi là bài toán đặt không chỉnh (*ill-posed problem*).

Lấy một ví dụ cụ thể, một bài toán rất quen thuộc, đó là bài toán tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình toán tử

$$A(x) = b, \tag{3.1}$$

trong đó A là một toán tử từ không gian Banach X vào không gian Banach Y. Đối với bài toán này, ta thấy nghiệm là $x \in X$ và dữ kiện ban đầu chính là toán tử A và vế phải $b \in Y$. Trong nhiều áp dụng, thay cho giá trị chính xác (A, b), ta chỉ biết các xấp xỉ $(A_\varepsilon, b_\delta)$.

Bây giờ ta giả sử rằng, toán tử A cho trước một cách chính xác, còn vế phải b được thay bởi b_δ sao cho $\|b_\delta - b\| \leq \delta$. Giả sử phương trình (3.1), trong đó ta thay b bởi b_δ, có nghiệm x^δ với mỗi δ. Khi $\delta \to 0$ thì $b_\delta \to b$ nhưng với bài toán đặt không chỉnh thì x^δ nói chung không hội tụ đến nghiệm chính xác x^0 nào đó của phương trình (3.1); trong trường hợp x^δ hội tụ đến x^0 thì x^δ được gọi là nghiệm xấp xỉ của bài toán đặt không chỉnh (3.1). Nếu ký hiệu

$$S_\delta := \{x \in X : \ \rho_Y(A(x), b_\delta) \leq \delta\}$$

thì nghiệm xấp xỉ của phương trình (3.1) phải nằm trong tập S_δ. Tuy nhiên, thông thường tập này rất lớn, tức là các phần tử trong đó cách nhau rất xa, vì vậy, không phải tất cả các phần tử trong S_δ đều có thể coi là nghiệm xấp xỉ của (3.1) được. Vì lẽ đó, vấn đề đặt ra là phải chọn b_δ như thế nào cho thích hợp cũng như chọn phần tử nào của S_δ có thể làm được nghiệm xấp xỉ của bài toán.

Sau đây là một số ví dụ về bài toán đặt không chỉnh được cho dưới dạng phương trình (3.1).

Ví dụ 3.1.1. Nếu A là toán tử liên tục mạnh, tức là A toán tử mọi dãy hội tụ yếu thành dãy hội tụ mạnh, thì bài toán (3.1) trong không gian vô hạn chiều nói chung là bài toán đặt không chỉnh. Thật vậy, giả sử $\{x^k\}$ là dãy chỉ hội tụ yếu về x và $y^k = A(x^k), y = A(x)$. Khi đó, do tính liên tục mạnh của A suy ra $\{y^k\}$ hội tụ mạnh về y. Như vậy, nghiệm của phương trình $A(x) = y$ không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu (không ổn định).

Ví dụ 3.1.2. Cho $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ là toán tử tuyến tính được xác định bởi ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Có thể thấy rằng, A là toán tử đơn điệu bởi $\langle Ax, x \rangle \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^3$ và phương trình $A(x) = b$ có dạng

$$\begin{cases} 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = b_1 \\ x_2 = b_2 \\ x_3 = b_3 \end{cases} \quad \text{với } b = (b_1, b_2, b_3), x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Dễ thấy rằng, hệ phương trình này vô định nếu $b = (0, b_2, b_3)$ với b_2, b_3 tùy ý và vô nghiệm nếu như thay vế phải bởi $b_\delta = (b_1^\delta, b_2, b_3)$ với $b_1^\delta \neq 0$.

3.1.2 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov

Năm 1963, A.N. Tikhonov [48] đưa ra phương pháp hiệu chỉnh nổi tiếng và kể từ đó lý thuyết các bài toán đặt không chỉnh phát triển một cách nhanh chóng và có mặt ở hầu hết các bài toán trong thực tế. Nội dung chủ yếu của phương pháp này là xây dựng nghiệm hiệu chỉnh cho phương trình toán tử (3.1) trong không gian Hilbert thực dựa trên việc tìm cực tiểu x_ε^δ của phiếm hàm Tikhonov

$$F_\varepsilon^\delta(x) := \|A(x) - b_\delta\|^2 + \varepsilon\|x - x^g\|^2.$$

Để x_ε^δ là nghiệm xấp xỉ của nghiệm chính xác x^0 của bài toán (3.1), cần phải có điều kiện cho toán tử A cũng như cách chọn tham số hiệu chỉnh $\varepsilon > 0$ thích hợp. Ngoài ra, vì tính không duy nhất nghiệm của bài toán, cũng cần phải có một tiêu chuẩn cho sự lựa chọn nghiệm x^0, mà trong phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, thông thường người ta sử dụng nghiệm x^0 có x^g- chuẩn nhỏ nhất, nghĩa là x^0 thỏa mãn

$$\begin{cases} A(x^0) = b, \\ \|x^0 - x^g\| = \min\{\|x - x^g\| : A(x) = b\}. \end{cases}$$

Như vậy, ở đây x^g đóng vai trò như là một tiêu chuẩn cho sự lựa chọn của nghiệm.

Trong những năm gần đây, nhiều tác giả [20, 26, 40, 46] đã áp dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov vào việc giải bài toán bất đẳng thức biến phân

$$VI(K, F) : \text{Tìm } x \in K \text{ sao cho } \langle F(x), y - x\rangle \geq 0,\ \forall y \in K$$

với $F : K \to K$ là toán tử đơn trị. Để giải bài toán này, theo phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, người ta giải một dãy bài toán hiệu chỉnh

$$VI(K, F_{\varepsilon_k}) : \text{Tìm } x^k \in K \text{ sao cho } \left\langle F_{\varepsilon_k}(x^k), y - x^k\right\rangle \geq 0, \forall y \in K,$$

trong đó $F_{\varepsilon_k} := F + \varepsilon_k I$ là toán tử hiệu chỉnh, $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ là ánh xạ đồng nhất và $\{\varepsilon_k\}$ là dãy các số thực dương sao cho $\varepsilon_k \to 0^+$.

Như đã biết, nếu đặt $f(x,y) := \langle F(x), y - x\rangle$ thì ta đưa được bài toán $VI(K,F)$ về bài toán $E(K,f)$; điều này gợi ý cho ta mở rộng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov vào việc giải BTCB $E(K,f)$ với bài toán hiệu chỉnh

$$E(K, f_{\varepsilon_k}) : \begin{cases} \text{Tìm } x^k \in K \text{ sao cho} \\ f_{\varepsilon_k}(x^k, y) := f(x^k, y) + \varepsilon_k g(x^k, y) \geq 0, \forall y \in K, \end{cases}$$

trong đó $x^g \in K$ là một điểm cho trước đóng vai trò nghiệm phỏng đoán của bài toán $E(K,f)$ và $g(x,y)$ là hàm cân bằng đơn điệu mạnh trên K. Một trường hợp riêng quan trọng là khi g là hàm khoảng cách được cho bởi

$$g(x,y) = \langle x - x^g, y - x\rangle .$$

Trong các phần dưới đây, chúng ta sẽ mở rộng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov vào BTCB đơn điệu và giả đơn điệu trên cơ sở phát triển các kết quả của Konnov-Pinyagina [25] cho BTCB đơn điệu cũng như của N.T. Hao [20] và Tam-Yao-Yen [46] cho bất đẳng thức biến phân giả đơn điệu.

3.2 Hiệu chỉnh Tikhonov cho BTCB đơn điệu

Trong phần này ta sẽ chứng tỏ rằng, nếu hàm cân bằng f đơn điệu trên K thì phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov có thể mở rộng được cho BTCB

$$E(K,f): \text{ Tìm } x \in K \text{ sao cho } f(x,y) \geq 0, \ \forall y \in K$$

với bài toán hiệu chỉnh được cho bởi

$$E(K, f_\varepsilon) : \begin{cases} \text{Tìm } x \in K \text{ sao cho} \\ f_\varepsilon(x, y) := f(x, y) + \varepsilon \langle x - x^g, y - x\rangle \geq 0, \ \forall y \in K, \end{cases}$$

trong đó $x^g \in K$ là nghiệm phỏng đoán của bài toán $E(K,f)$ và $\varepsilon > 0$ là tham số hiệu chỉnh. Với mỗi ε, lấy tùy ý một nghiệm $x(\varepsilon)$ của bài toán $E(K, f_\varepsilon)$. Khi đó, họ $\{x(\varepsilon)\}$ được gọi là một quỹ đạo nghiệm của bài toán hiệu chỉnh.

Có thể thấy rằng, $x = x^g$ là nghiệm của bài toán hiệu chỉnh $E(K, f_\varepsilon)$ nếu và chỉ nếu nó là nghiệm của bài toán gốc $E(K,f)$.

Định lý 3.1. *Giả sử f đơn điệu trên K và thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$. Khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$, bài toán $E(K, f_\varepsilon)$ luôn có duy nhất nghiệm $x(\varepsilon)$ và các khẳng định sau đây là tương đương nhau:*

a) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon)$ *tồn tại.*

b) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \|x(\varepsilon)\| < +\infty$.

c) *Tập nghiệm $SE(K, f)$ của bài toán $E(K, f)$ khác rỗng.*

Hơn nữa, nếu một trong ba khẳng định trên được thỏa thì $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon)$ chính là hình chiếu x^* của x^g trên tập $SE(K, f)$ và cũng là nghiệm duy nhất của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$, trong đó

$$\widetilde{K} := SE(K, f) \text{ và } g(x, y) := \langle x - x^g, y - x \rangle .$$

Chứng minh. Dễ thấy $f_\varepsilon(., y)$ thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$ và đơn điệu mạnh trên K do f đơn điệu và g đơn điệu mạnh trên K (xem Nhận xét 1.3.1). Do đó, theo Định lý 2.3.b), bài toán $E(K, f_\varepsilon)$ có duy nhất nghiệm.

a) $\Rightarrow$ b): Hiển nhiên.

b) $\Rightarrow$ c): Tính bị chặn của $\{x(\varepsilon)\}$ khi $\varepsilon \to 0^+$ suy ra rằng, với mỗi dãy các số dương $\{\varepsilon_k\}$ hội tụ về 0, dãy nghiệm $\{x^k := x(\varepsilon_k)\}$ phải có ít nhất một dãy con $\{x^{k_j}\}$ nào đó hội tụ về một điểm x^* trong K. Vì x^{k_j} là nghiệm (duy nhất) của bài toán $E(K, f_{\varepsilon_{k_j}})$ với mỗi k_j nên

$$f_{\varepsilon_{k_j}}(x^k, y) \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Do $f(., y)$ nửa liên tục trên với mỗi $y \in K$ nên

$$0 \leq \overline{\lim}_{k_j \to \infty} f_{\varepsilon_{k_j}}(x^{k_j}, y) = \overline{\lim}_{k_j \to \infty} f(x^{k_j}, y) \leq f(x^*, y), \ \forall y \in K.$$

Chứng tỏ $x^* \in SE(K, f)$ nên $SE(K, f) \neq \emptyset$.

c) $\Rightarrow$ a): Cho $\bar{x}$ là một nghiệm tùy ý của bài toán $E(K, f)$ và $\{\varepsilon_k\}$ là dãy bất kỳ các số dương hội tụ về 0. Gọi $x^k := x(\varepsilon_k)$ là nghiệm của bài toán $E(K, f_{\varepsilon_k})$. Khi đó với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{cases} f(\bar{x}, x^k) \geq 0, \\ f_{\varepsilon_k}(x^k, \bar{x}) = f(x^k, \bar{x}) + \varepsilon_k \left\langle x^k - x^g, \bar{x} - x^k \right\rangle \geq 0. \end{cases}$$

Cộng các bất đẳng thức này lại, ta được

$$f(\bar{x}, x^k) + f(x^k, \bar{x}) + \varepsilon_k \left\langle x^k - x^g, \bar{x} - x^k \right\rangle \geq 0.$$

Do f đơn điệu nên

$$f(\bar{x}, x^k) + f(x^k, \bar{x}) \leq 0.$$

Vì vậy

$$g(x^k, \bar{x}) := \left\langle x^k - x^g, \bar{x} - x^k \right\rangle = \left\langle x^k - x^g, (\bar{x} - x^g) - (x^k - x^g) \right\rangle \geq 0. \quad (3.2)$$

Suy ra

$$\left\langle x^k - x^g, \bar{x} - x^g \right\rangle \geq \|x^k - x^g\|^2.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz vào vế trái của bất đẳng thức này, ta nhận được

$$\|x^k - x^g\| \leq \|\bar{x} - x^g\|, \ \forall k. \quad (3.3)$$

Chứng tỏ dãy $\{x^k - x^g\}$ bị chặn và từ

$$\|x^k - x^g\| \geq \|x^k\| - \|x^g\|$$

suy ra

$$\|x^k\| \leq \|\bar{x} - x^g\| + \|x^g\|.$$

Do đó, dãy $\{x^k\}$ cũng bị chặn. Lấy x^* là một điểm giới hạn nào đó của $\{x^k\}$. Không mất tính tổng quát, giả sử $x^k \to x^* \in K$ khi $k \to \infty$. Từ (3.3) ta nhận được

$$\|x^* - x^g\| \leq \|\bar{x} - x^g\|. \quad (3.4)$$

Vì $x^k \in SE(K, f_{\varepsilon_k})$ nên

$$f_{\varepsilon_k}(x^k, y) \geq 0, \ \forall y \in K$$

Do $f(., y)$ là nửa liên tục trên nên suy ra được

$$0 \leq \overline{\lim}_{k \to \infty} f_{\varepsilon_k}(x^k, y) = \overline{\lim}_{k \to \infty} f(x^k, y) \leq f(x^*, y), \ \forall y \in K.$$

Chứng tỏ $x^* \in \widetilde{K} := SE(K, f)$. Hơn nữa từ (3.2), bằng cách lấy giới hạn khi $k \to +\infty$, ta nhận được

$$g(x^*, \bar{x}) := \langle x^* - x^g, \bar{x} - x^* \rangle \geq 0.$$

Vì $\bar{x}$ là một phần tử bất kỳ của tập $\widetilde{K}$, suy ra rằng x^* là một nghiệm của BTCB $E(\widetilde{K}, g)$. Do g đơn điệu mạnh trên K chứa tập $\widetilde{K}$, là tập lồi đóng và khác rỗng, nên $E(\widetilde{K}, g)$ có duy nhất nghiệm x^* theo Định lý 2.3.b). Như vậy, ta đã chứng minh được rằng, bất kỳ điểm giới hạn nào của dãy $\{x^k\}$ cũng là nghiệm duy nhất của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$. Do đó, toàn bộ dãy $\{x^k\}$ phải hội tụ về x^*.

Mặt khác, theo Định lý 1.3 (định lý phép chiếu lên tập lồi đóng), hình chiếu của x^g trên $SE(K, f)$ được xác định duy nhất; ký hiệu phần tử hình chiếu này là x'. Thay $\bar{x} = x'$ vào (3.4), ta nhận được

$$\|x^* - x^g\| \leq \|x' - x^g\|.$$

Vì vậy

$$x^* - x^g = x' - x^g \text{ hay } x^* = x'.$$

Định lý được chứng minh. □

Nhận xét 3.2.1. Có thể tổng quát hóa Định lý 3.1 bằng cách xét bài toán phụ $E(K, f + \varepsilon g)$, trong đó $g : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm cân bằng đơn điệu mạnh và thỏa mãn điều kiện

$$|g(x, y)| \leq L\|x - x^g\|\|y - x\|, \ \forall x, y \in K \tag{3.5}$$

với $L > 0$ là hằng số. Do giả thiết, f đơn điệu và g đơn điệu mạnh trên K, nên $f_\varepsilon := f + \varepsilon g$ đơn điệu mạnh trên K với mọi $\varepsilon > 0$. Kết quả là với mỗi $\varepsilon > 0$, bài toán $E(K, f_\varepsilon)$ có duy nhất nghiệm $x(\varepsilon)$. Ta gọi họ nghiệm $\{x(\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ này là $g-$ *quỹ đạo Tikhonov.*

Một ví dụ hàm g thỏa điều kiện (3.5) là

$$g(x, y) := \langle F(x) - F(x^g), y - x \rangle ,$$

trong đó $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ là toán tử Lipschitz trên K, tức là tồn tại hằng số $L > 0$ sao cho

$$\|F(x) - F(y)\| \leq L\|x - y\|, \ \forall x, y \in K.$$

Ta có kết quả tổng quát hóa Định lý 3.1 như sau:

Định lý 3.2. *Giả sử rằng*

i) *f đơn điệu trên K và thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$.*

ii) *g là hàm cân bằng đơn điệu mạnh trên K với hệ số $\gamma > 0$, thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$ và điều kiện (3.5).*

Khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$, bài toán $E(K, f + \varepsilon g)$ có duy nhất nghiệm $x(\varepsilon)$ và ba khẳng định sau đây là tương đương nhau:

a) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon)$ *tồn tại.*

b) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \|x(\varepsilon)\| < +\infty$.

c) $SE(K, f) \neq \emptyset$.

Hơn nữa, nếu một trong ba khẳng định được thỏa thì $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon)$ chính là nghiệm duy nhất x^* của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$, trong đó $\widetilde{K} := SE(K, f)$.

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh c) $\Rightarrow$ a) và khẳng định cuối về giới hạn $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon)$; phần còn lại được chứng minh tương tự như chứng minh Định lý 3.1.

Cho $\bar{x}$ là một nghiệm bất kỳ của $E(K, f)$, và $\{\varepsilon_k\}$ là một dãy tùy ý các số dương hội tụ về 0. Gọi $x^k := x(\varepsilon_k)$ là nghiệm duy nhất của bài toán $E(K, f_{\varepsilon_k})$. Khi đó, với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{cases} f(\bar{x}, x^k) \geq 0, \\ f_{\varepsilon_k}(x^k, \bar{x}) = f(x^k, \bar{x}) + \varepsilon_k g(x^k, \bar{x}) \geq 0. \end{cases}$$

Cộng các bất đẳng thức này lại, ta được

$$f(\bar{x}, x^k) + f(x^k, \bar{x}) + \varepsilon_k g(x^k, \bar{x}) \geq 0.$$

Vì f đơn điệu trên K nên

$$g(x^k, \bar{x}) \geq 0. \tag{3.6}$$

Mặt khác, do g đơn điệu mạnh với hệ số $\gamma > 0$ trên K nên

$$g(x^k, \bar{x}) + g(\bar{x}, x^k) \leq -\gamma \|x^k - \bar{x}\|^2. \tag{3.7}$$

Từ (3.6) và (3.7), ta nhận được

$$g(\bar{x}, x^k) \leq -\gamma \|x^k - \bar{x}\|^2$$

hay

$$-g(\bar{x}, x^k) \geq \gamma \|x^k - \bar{x}\|^2.$$

Do điều kiện (3.5) nên

$$L\|\bar{x} - x^g\| \|x^k - \bar{x}\| \geq |-g(\bar{x}, x^k)| \geq \gamma \|x^k - \bar{x}\|^2.$$

Suy ra

$$\|x^k - \bar{x}\| \leq \frac{L}{\gamma}\|\bar{x} - x^g\|, \ \forall k.$$

Vì vậy, dãy $\{x^k\}$ bị chặn nên ít nhất nó có một điểm giới hạn $x^* \in K$. Để đơn giản, giả sử $x^k \to x^*$ khi $k \to \infty$. Do x^k là nghiệm duy nhất của $E(K, f_{\varepsilon_k})$ với mọi $k \in K$ nên

$$f_{\varepsilon_k}(x^k, y) \geq 0, \ \forall y \in K.$$

Bởi $f(., y)$ và $g(., y)$ nửa liên tục trên với mỗi $y \in K$ nên

$$0 \leq \overline{\lim}_{k\to\infty} f_{\varepsilon_k}(x^k, y) = \overline{\lim}_{k\to\infty} f(x^k, y) \leq f(x^*, y), \ \forall y \in K.$$

Do đó $x^* \in \widetilde{K} := SE(K, f)$. Hơn nữa, từ (3.7) và bởi tính nửa liên tục trên của $g(., y)$ tại $\bar{x}$, ta nhận được

$$g(x^*, \bar{x}) \geq \overline{\lim}_{k\to\infty} g(x^k, \bar{x}) \geq 0.$$

Vì $\bar{x}$ là một phần tử tùy ý của tập $\widetilde{K}$ nên suy ra x^* là nghiệm của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$ và vì g đơn điệu mạnh trên K chứa tập lồi đóng khác rỗng $\widetilde{K}$ nên bài toán $E(\widetilde{K}, g)$ có duy nhất nghiệm x^* theo Định lý 2.3.b). Như vậy, bất kỳ điểm giới hạn nào của dãy $\{x^k\}$ cũng là nghiệm duy nhất của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$. Do đó toàn bộ dãy $\{x^k\}$ phải hội tụ về x^*. □

3.3 Hiệu chỉnh Tikhonov cho BTCB giả đơn điệu

Như đã thấy, nếu f đơn điệu thì hàm cân bằng f_ε của bài toán hiệu chỉnh $E(K, f_\varepsilon)$ là đơn điệu mạnh nên bài toán này có duy nhất nghiệm. Còn khi f giả đơn điệu, nói chung, f_ε là không giả đơn điệu và do đó tập nghiệm của bài toán $E(K, f_\varepsilon)$ có thể không còn duy nhất nghiệm nữa, thậm chí là không lồi, như ta thấy ở ví dụ sau đây.

Ví dụ 3.3.1. Cho a là một số dương tùy ý, $K = [-3, +\infty)$ và các hàm cân bằng

$$\begin{cases} f(x,y) := \frac{1}{a}(x^2+2)(y-x), \\ g(x,y) := x(y-x). \end{cases}$$

Theo Nhận xét 2.2.1 và Ví dụ 2.2.3, g là đơn điệu mạnh, f là giả đơn điệu và với $\varepsilon = \frac{3}{a}$, hàm

$$f_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{a}\left[(x^2+3x+2)(y-x)\right]$$

là không giả đơn điệu. Mặt khác, các đẳng thức

$$f_\varepsilon(-1,y) = f_\varepsilon(-2,y) = 0$$

chứng tỏ $x = -1$ và $x = -2$ là hai nghiệm phân biệt của bài toán $E(K, f_\varepsilon)$.

Định lý sau đây cho thấy, khi hàm cân bằng f giả đơn điệu, mặc dù bài toán hiệu chỉnh $E(K, f_\varepsilon)$ không còn duy nhất nghiệm nữa nhưng mọi quỹ đạo nghiệm của nó đều hội tụ đến nghiệm của bài toán gốc $E(K, f)$ gần với nghiệm phỏng đoán x^g nhất. Điều này có nghĩa là, đối với phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, BTCB giả đơn điệu vẫn ổn định theo nghĩa nghiệm của nó phụ thuộc liên tục theo các dữ kiện ban đầu.

Định lý 3.3. *Giả sử f giả đơn điệu trên K và các giả thiết $(A_1), (A_2)$ được thỏa. Khi đó các khẳng định sau đây là tương đương nhau:*

a) *$SE(K, f_\varepsilon)$ khác rỗng với mỗi $\varepsilon > 0$ và $\lim_{\varepsilon\to 0^+} x(\varepsilon)$ tồn tại, trong đó $x(\varepsilon)$ là phần tử được chọn tùy ý trong $SE(K, f_\varepsilon)$.*

b) *$SE(K, f_\varepsilon)$ khác rỗng với mỗi $\varepsilon > 0$ và $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \sup \|x(\varepsilon)\| < +\infty$, trong đó $x(\varepsilon)$ là phần tử được chọn tùy ý trong $SE(K, f_\varepsilon)$.*

c) *$SE(K, f) \neq \emptyset$.*

Hơn nữa, nếu một trong ba khẳng định trên được thỏa thì $\lim_{\varepsilon\to 0^+} x(\varepsilon)$ chính là hình chiếu x^* của x^g trên tập $SE(K, f)$ và cũng là nghiệm duy nhất của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$, trong đó

$$\widetilde{K} := SE(K, f) \text{ và } g(x,y) := \langle x - x^g, y - x\rangle\,.$$

Chứng minh. Dễ thấy f_ε thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$.

a) $\Rightarrow$ b) và b) $\Rightarrow$ c): Chứng minh tương tự như trong phần chứng minh Định lý 3.1.

c) $\Rightarrow$ a): Để chứng minh $SE(K, f_\varepsilon) \neq \emptyset$ với mỗi $\varepsilon > 0$, theo Định lý 2.4, chỉ cần tìm một vector $y^0 \in K$ sao cho tập

$$L(y^0, f_\varepsilon) := \{x \in K : f_\varepsilon(x, y^0) = f(x, y^0) + \varepsilon \left\langle x - x^g, y^0 - x \right\rangle \geq 0\}$$

bị chặn. Thật vậy, bởi $SE(K, f) \neq \emptyset$ nên có thể lấy $y^0 \in SE(K, f)$. Khi đó

$$f(y^0, x) \geq 0, \ \forall x \in K.$$

Suy ra

$$f(x, y^0) \leq 0, \ \forall x \in K \tag{3.8}$$

bởi tính giả đơn điệu của f. Lưu ý rằng, do $y^0 \in L(y^0, f_\varepsilon)$ nên $L(y^0, f_\varepsilon) \neq \emptyset$. Với mọi $x \in L(y^0, f_\varepsilon)$, ta có

$$f_\varepsilon(x, y^0) = f(x, y^0) + \varepsilon \left\langle x - x^g, y^0 - x \right\rangle \geq 0$$

hay

$$f(x, y^0) \geq \left\langle x - x^g, x - y^0 \right\rangle. \tag{3.9}$$

Từ (3.8) và (3.9), ta nhận được

$$0 \geq \left\langle x - x^g, x - y^0 \right\rangle = \left\langle (x - y^0) + (y^0 - x^g), x - y^0 \right\rangle$$

hay

$$\|x - y^0\|^2 \leq \left\langle x^g - y^0, x - y^0 \right\rangle.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz vào vế trái của bất đẳng thức này, ta có

$$\|x - y^0\| \leq \|x^g - y^0\|, \ \forall x \in L(y^0, f_\varepsilon).$$

Do đó

$$\|x\| \leq \|y^0\| + \|x^g - y^0\|, \ \forall x \in L(y^0, f_\varepsilon).$$

Chứng tỏ $L(y^0, f_\varepsilon)$ bị chặn và do đó bài toán $E(K, f_\varepsilon)$ có nghiệm với mọi ε.

Bây giờ, lấy $\bar{x}$ là một nghiệm tùy ý của $E(K, f)$ và $\{\varepsilon_k\}$ là một dãy bất kỳ các số dương hội tụ về 0. Chọn tùy ý dãy $\{x^k\} \subset SE(K, f_{\varepsilon_k})$. Với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$f(\bar{x}, x^k) \geq 0 \tag{3.10}$$

và

$$f_{\varepsilon_k}(x^k, \bar{x}) := f(x^k, \bar{x}) + \varepsilon_k \left\langle x^k - x^g, \bar{x} - x^k \right\rangle \geq 0 \tag{3.11}$$

Do f giả đơn điệu trên K nên từ (3.10) suy ra $f(x^k, \bar{x}) \leq 0$. Vì vậy, từ (3.11) ta nhận được

$$g(x^k, \bar{x}) := \left\langle x^k - x^g, \bar{x} - x^k \right\rangle = \left\langle x^k - x^g, (\bar{x} - x^g) - (x^k - x^g) \right\rangle \geq 0.$$

Suy ra

$$\left\langle x^k - x^g, \bar{x} - x^g \right\rangle \geq \|x^k - x^g\|^2.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz vào vế phải của bất đẳng thức này, ta được

$$\|x^k - x^g\| \leq \|\bar{x} - x^g\|, \ \forall k.$$

Chứng tỏ dãy $\{x^k\}$ bị chặn. Lấy x^* là điểm giới hạn tùy ý của dãy này. Không mất tính tổng quát, giả sử $x^k \to x^* \in K$ khi $k \to \infty$. Lập luận tương tự như trong phần chứng minh Định lý 3.1, ta có $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon) = x^*$, và hơn nữa, x^* là hình chiếu của x^g lên tập $\widetilde{K} = SE(K, f)$ và cũng là nghiệm duy nhất của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$, với $g(x, y) := \langle x - x^g, y - x \rangle$. $\square$

Định lý sau đây cung cấp một vài thông tin hữu ích về tập nghiệm của bài toán hiệu chỉnh $E(K, f_\varepsilon)$ khi f giả đơn điệu trên K và thỏa điều kiện bức (A_3).

Định lý 3.4. *Giả sử f giả đơn điệu trên K và thỏa mãn các giả thiết $(A_1) - (A_3)$. Khi đó*

a) *Với $\varepsilon > 0$ bất kỳ, tập nghiệm $SE(K, f_\varepsilon)$ compắc và khác rỗng.*

b) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} diam SE(K, f_\varepsilon) = 0$, *trong đó*

$$diam SE(K, f_\varepsilon) := \sup_{x, y \in SE(K, f_\varepsilon)} \|x - y\|.$$

Chứng minh. a) Với các giả thiết của định lý, theo Định lý 2.2.c), tập $SE(K, f)$ khác rỗng. Lấy $y^0 \in SE(K, f)$ bất kỳ. Theo Định lý 2.4, chỉ cần chứng tỏ tập

$$L(y^0, f_\varepsilon) := \{x \in K : f_\varepsilon(x, y^0) = f(x, y^0) + \varepsilon \left\langle x - x^g, y^0 - x \right\rangle \geq 0\}$$

bị chặn. Tuy nhiên, điều này đã được chỉ ra trong phần chứng minh c)⇒ a) của Định lý 3.3.

b) Theo khẳng định a), với mỗi $\varepsilon > 0$, tập nghiệm $SE(K, f_\varepsilon)$ là compắc và khác rỗng. Khi đó sẽ có $x(\varepsilon), y(\varepsilon) \in SE(K, f_\varepsilon)$ sao cho

$$\|x(\varepsilon) - y(\varepsilon)\| = diam SE(K, f_\varepsilon).$$

Khẳng định cuối của Định lý 3.3 chứng tỏ

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} y(\varepsilon) = x^*,$$

trong đó x^* là nghiệm duy nhất của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$ với

$$\widetilde{K} := SE(K, f) \text{ và } \; g(x, y) := \langle x - x^g, y - x \rangle .$$

Suy ra

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} diam SE(K, f_\varepsilon) = 0.$$

Định lý được chứng minh. □

Dựa vào cách chứng minh các Định lý 3.2, 3.3 và 3.4, tương tự như trường hợp f đơn điệu, ta có thể tổng quát hóa các Định lý 3.3 và 3.4 như sau:

Định lý 3.5. *Giả sử rằng*

i) f giả đơn điệu trên K và thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$.

ii) $g : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm cân bằng đơn điệu mạnh trên K với hằng số $\gamma > 0$, thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$ và điều kiện (3.5).

Khi đó các khẳng định sau đây là tương đương nhau:

a) *Với mọi $\varepsilon > 0$, bài toán $E(K, f + \varepsilon g)$ có nghiệm và $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon)$ tồn tại, trong đó $x(\varepsilon)$ là nghiệm tùy ý của $E(K, f + \varepsilon g)$.*

b) *Với mọi $\varepsilon > 0$, bài toán $E(K, f + \varepsilon g)$ có nghiệm và $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \|x(\varepsilon)\| < \infty$, trong đó $x(\varepsilon)$ là nghiệm tùy ý của $E(K, f + \varepsilon g)$.*

c) $SE(K, f) \neq \emptyset$.

Hơn nữa, nếu một trong các khẳng định trên được thỏa thì $\lim_{\varepsilon\to 0^+} x(\varepsilon)$ *chính là nghiệm duy nhất của BTCB* $E(\widetilde{K}, g)$ *với* $\widetilde{K} := SE(K, f)$. *Ngoài ra, nếu bài toán* $E(K, f)$ *thỏa mãn điều kiện bức* (A_3) *thì tập nghiệm* $SE(K, f+\varepsilon g)$ *của bài toán* $E(K, f+\varepsilon g)$ *là compắc khác rỗng với mọi* $\varepsilon > 0$ *và*

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} diam SE(K, f+\varepsilon g) = 0.$$

Chứng minh. Chỉ cần chứng minh c) $\Rightarrow$ a) và khẳng định cuối về giới hạn $\lim_{\varepsilon\to 0^+} x(\varepsilon)$; phần còn lại được chứng minh tương tự như chứng minh các Định lý 3.2, 3.3 và 3.4.

Để chứng minh $SE(K, f_\varepsilon) \neq \emptyset$ với mỗi $\varepsilon > 0$, theo Định lý 2.4, chỉ cần tìm một vector $y^0 \in K$ sao cho tập

$$L(y^0, f_\varepsilon) := \{x \in K : f_\varepsilon(x, y^0) = f(x, y^0) + \varepsilon g(x, y^0) \geq 0\}$$

bị chặn, trong đó $f_\varepsilon := f + \varepsilon g$. Bởi giả thiết c) có thể lấy $y^0 \in SE(K, f)$. Khi đó

$$f(y^0, x) \geq 0, \ \forall x \in K.$$

Suy ra

$$f(x, y^0) \leq 0, \ \forall x \in K \tag{3.12}$$

bởi tính giả đơn điệu của f. Do $y^0 \in L(y^0, f_\varepsilon)$ nên $L(y^0, f_\varepsilon) \neq \emptyset$. Với mọi $x \in L(y^0, f_\varepsilon)$, ta có

$$f_\varepsilon(x, y^0) = f(x, y^0) + \varepsilon g(x, y^0) \geq 0 \Leftrightarrow f(x, y^0) \geq -\varepsilon g(x, y^0). \tag{3.13}$$

Từ (3.12) và (3.13), ta nhận được

$$g(x, y^0) \geq 0, \ \forall x \in L(y^0, f_\varepsilon). \tag{3.14}$$

Do g đơn điệu mạnh với hệ số $\gamma > 0$ nên

$$g(x, y^0) + g(y^0, x) \leq -\gamma\|x - y^0\|^2. \tag{3.15}$$

Từ (3.14) và (3.15) suy ra

$$-g(y^0, x) \geq \gamma\|x - y^0\|^2 + g(x, y^0) \geq \gamma\|x - y^0\|^2.$$

Sử dụng điều kiện (3.5), ta thấy

$$\|x - y^0\| \leq \frac{L}{\gamma}\|x^g - y^0\|, \ \forall x \in L(y^0, f_\varepsilon).$$

Điều này chứng tỏ tập $L(y^0, f_\varepsilon)$ bị chặn.

Cho $\bar{x}$ là một nghiệm tùy ý của $EP(K, f)$ và $\{\varepsilon_k\}$ là một dãy số dương hội tụ về 0. Lấy tùy ý một dãy $\{x^k\}$ với $x^k \in SE(K, f_{\varepsilon_k})$. Khi đó, với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$f(\bar{x}, x^k) \geq 0 \tag{3.16}$$

và

$$f_{\varepsilon_k}(x^k, \bar{x}) := f(x^k, \bar{x}) + \varepsilon_k g(x^k, \bar{x}) \geq 0. \tag{3.17}$$

Bởi tính giả đơn điệu của f và từ (3.16) suy ra $f(x^k, \bar{x}) \leq 0$. Vì vậy, từ (3.17), ta có

$$g(x^k, \bar{x}) \geq 0.$$

Lập luận tương tự như trong chứng minh của định lý 3.2, ta chỉ ra được dãy $\{x^k\}$ bị chặn và có duy nhất một điểm giới hạn x^*, điểm giới hạn này cũng chính là nghiệm duy nhất của BTCB $E(\widetilde{K}, g)$ với $\widetilde{K} = SE(K, f)$. Do đó $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon) = x^*$. □

Các ví dụ dưới đây nhằm minh họa cho những kết quả đã đạt được trong các Định lý 3.1 và 3.3 khi áp dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov vào BTCB đơn điệu và giả đơn điệu.

Ví dụ 3.3.2. Cho $K = \mathbb{R}^2_+ = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ và hàm $f : K \times K \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x, y) = x_1^2(y_1 - x_1) \geq 0, \ \forall x = (x_1, x_2), \ y = (y_1, y_2) \in K.$$

Có thể thấy tập nghiệm của bài toán $E(K, f)$ là

$$\widetilde{K} = SE(K, f) = \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}_+\}.$$

Ta có

$$\begin{aligned} f(x, y) + f(y, x) &= x_1^2(y_1 - x_1) + y_1^2(x_1 - y_1) \\ &= -(x_1 + y_1)(x_1 - y_1)^2 \leq 0, \ \forall x, y \in K \end{aligned}$$

nên f đơn điệu trên K.

Nếu áp dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán $E(K,f)$, với việc chọn $x^{g,0} = (0,0) \in K$ làm vai trò nghiệm phỏng đoán của $E(K,f)$ thì hàm hiệu chỉnh sẽ là

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^0(x,y) &= x_1^2(y_1 - x_1) + \varepsilon \left\langle x - x^{g,0}, y - x \right\rangle \\ &= x_1^2(y_1 - x_1) + \varepsilon x_1(y_1 - x_1) + \varepsilon x_2(y_2 - x_2) \\ &= x_1(x_1 + \varepsilon)(y_1 - x_1) + \varepsilon x_2(y_2 - x_2). \end{aligned}$$

BTCB đơn điệu mạnh $E(K, f_\varepsilon^0)$ có duy nhất nghiệm $x(\varepsilon) := (0,0)$ (lưu ý $x(\varepsilon) = (-\varepsilon, 0)$ bị loại). Hiển nhiên $x(\varepsilon) \to x^{*,0} := (0,0) \in \widetilde{K}$ khi $\varepsilon \to 0$ và $x^{*,0}$ cũng là nghiệm duy nhất của BTCB đơn điệu mạnh $E(\widetilde{K}, g)$ với

$$g(x,y) = \langle x, y - x \rangle = x_1(y_1 - x_1) + x_2(y_2 - x_2).$$

Còn nếu chọn $x^{g,1} = (1,2) \in K$ làm vai trò nghiệm phỏng đoán của $E(K,f)$ thì hàm hiệu chỉnh tương ứng với nghiệm này sẽ là

$$\begin{aligned} f_\varepsilon^1(x,y) &= x_1^2(y_1 - x_1) + \varepsilon \left\langle x - x^{g,1}, y - x \right\rangle \\ &= x_1^2(y_1 - x_1) + \varepsilon(x_1 - 1)(y_1 - x_1) + \varepsilon(x_2 - 2)(y_2 - x_2) \\ &= (x_1^2 + \varepsilon x_1 - \varepsilon)(y_1 - x_1) + \varepsilon(x_2 - 2)(y_2 - x_2). \end{aligned}$$

Bài toán $E(K, f_\varepsilon^1)$ có duy nhất nghiệm $x(\varepsilon) := (\frac{-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4\varepsilon}}{2}, 2) \in K$. Rõ ràng $x(\varepsilon) \to x^{*,1} := (0,2) \in \widetilde{K}$ khi $\varepsilon \to 0$. Ta thấy $x^{*,1}$ chính là hình chiếu của $x^{g,1}$ trên $\widetilde{K}$ và nó cũng là nghiệm duy nhất của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$ với

$$g(x,y) = \left\langle x - x^{g,1}, y - x \right\rangle = (x_1 - 1)(y_1 - x_1) + (x_2 - 2)(y_2 - x_2).$$

Ví dụ 3.3.3. Cho $K := \mathbb{R}_+^2$ và hàm số $f : K \times K \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$f(x,y) = \begin{cases} x_1(y_1 - x_1) & \text{nếu } x_1 \neq 1 \\ 2x_1(y_1 - x_1) & \text{nếu } x_1 = 1 \end{cases} = \begin{cases} x_1(y_1 - x_1) & \text{nếu } x_1 \neq 1 \\ 2(y_1 - 1) & \text{nếu } x_1 = 1 \end{cases}$$

với $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in K$. Tập nghiệm của bài toán $E(K,f)$ là

$$\widetilde{K} = SE(K,f) = \{(0, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}_+\}.$$

Với $x = (1, x_2), y = (\frac{3}{2}, y_2), \forall x_2, y_2 \in \mathbb{R}_+$, ta có

$$f(x,y) + f(y,x) = 2\left(\frac{3}{2} - 1\right) + \frac{3}{2}\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4} > 0$$

nên f không đơn điệu trên K. Ta sẽ chứng minh f giả đơn điệu trên K. Thật vậy, xét các trường hợp sau đây:

- $x_1 = 1, y_1 = 1 : f(x,y) = 0 \Rightarrow f(y,x) = 0, \forall x, y \in K.$
- $x_1 = 1, y_1 \neq 1 : f(x,y) = 2(y_1 - 1) \geq 0 \Rightarrow f(y,x) = y_1(1-y_1) \leq 0, \forall x, y \in K.$
- $x_1 \neq 1, y_1 = 1 : f(x,y) = x_1(1-x_1) \geq 0 \Rightarrow x_1 = 0$ hoặc $1 - x_1 \geq 0 \Rightarrow f(y,x) = -2 \leq 0$ hoặc $f(y,x) = 2(x_1 - 1) \leq 0, \forall x, y \in K.$
- $x_1 \neq 1, y_1 \neq 1 : f(x,y) = x_1(y_1 - x_1) \geq 0 \Rightarrow x_1 = 0$ hoặc $y_1 - x_1 \geq 0 \Rightarrow f(y,x) = -y_1^2 \leq 0$ hoặc $f(y,x) = y_1(x_1 - y_1) \leq 0, \forall x, y \in K.$

Như vậy ta luôn có

$$f(x,y) \geq 0 \Rightarrow f(y,x) \leq 0, \ \forall x, y \in K.$$

Chứng tỏ f giả đơn điệu trên K.

Bây giờ ta sẽ áp dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cho bài toán $E(K,f)$ với việc chọn $x^g = (a,b) \in K$ làm vai trò nghiệm phỏng đoán của $E(K,f)$. Khi đó, hàm hiệu chỉnh là

$$f_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} (x_1(1+\varepsilon) - a\varepsilon)(y_1 - x_1) + \varepsilon(x_2 - b)(y_2 - x_2) & \text{nếu } x_1 \neq 1 \\ (2 + \varepsilon - a\varepsilon)(y_1 - 1) + \varepsilon(x_2 - b)(y_2 - x_2) & \text{nếu } x_1 = 1. \end{cases}$$

Bài toán $E(K, f_\varepsilon)$ có nghiệm $x(\varepsilon) := \left(\frac{a\varepsilon}{1+\varepsilon}, b\right) \to x^* := (0,b) \in \widetilde{K}$ khi $\varepsilon \to 0$. Dễ thấy x^* chính là hình chiếu của x^g trên $\widetilde{K}$ và nó cũng là nghiệm duy nhất của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$ với

$$g(x,y) = (x_1 - a)(y_1 - x_1) + (x_2 - b)(y_2 - x_2).$$

3.4 Áp dụng vào bất đẳng thức biến phân đa trị

Trong phần này, chúng ta sẽ áp dụng các kết quả đã nhận được trong những phần trước vào bất đẳng thức biến phân đa trị.

Cho $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert với một tôpô τ nào đấy và $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là ánh xạ đa trị có giá trị lồi compắc khác rỗng và nửa liên tục trên trên K, trong đó

$K \subseteq domF$ là tập lồi đóng khác rỗng. Xét bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị

$$MVI(K, F) : \begin{cases} \text{Tìm } x \in K \text{ và } u \in F(x) \text{ sao cho} \\ \langle u, y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K. \end{cases}$$

Đặt

$$f(x, y) := \sup_{u \in F(x)} \langle u, y - x \rangle = \max_{u \in F(x)} \langle u, y - x \rangle .$$

Như đã biết, x là nghiệm của bài toán $E(K, f)$ nếu và chỉ nếu x cùng với $u \in F(x)$ nào đó là nghiệm của bài toán $MVI(K, F)$ (xem Mục 1.2.2). Theo định lý cực đại Berge, $f(., y)$ là nửa liên tục trên trên K với mỗi $y \in K$. Hơn nữa, với mỗi $x \in K$, hàm $f(x, .)$ là cực đại của một họ các hàm affine nên nó là hàm lồi và nửa liên tục dưới trên K. Vì vậy hàm f thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$. Ngoài ra, theo Nhận xét 2.2.1, f đơn điệu (/ giả đơn điệu) trên K nếu F đơn điệu (/ giả đơn điệu) trên K.

Để nhận được hiệu chỉnh Tikhonov cho BTCB $E(K, f)$, với hàm hiệu chỉnh

$$g(x, y) = \langle x - x^g, y - x \rangle ,$$

ta lấy

$$F_\varepsilon(x) := F(x) + \varepsilon(x - x^g) \text{ với } \varepsilon > 0$$

và

$$f_\varepsilon(x, y) := \sup_{u \in F_\varepsilon(x)} \langle u, y - x \rangle ,$$

trong đó $\varepsilon > 0$ và x^g cho trước. Do $F(x)$ compắc với mỗi $x \in K$ nên ta có thể viết

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x, y) &:= \sup_{u \in F_\varepsilon(x)} \langle u, y - x \rangle \\ &= \max_{u \in F(x)} \langle u, y - x \rangle + \varepsilon \langle x - x^g, y - x \rangle \\ &= f(x, y) + \varepsilon \langle x - x^g, y - x \rangle . \end{aligned}$$

Trong trường hợp này, bất đẳng thức biến phân hiệu chỉnh có dạng

$$MVI(K, F_\varepsilon) : \begin{cases} \text{Tìm } x \in K \text{ và } u \in F_\varepsilon(x) \text{ sao cho} \\ \langle u, y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K. \end{cases}$$

Từ những phân tích nói trên, ta có thể áp dụng các Định lý 3.1, 3.3 và 3.4 cho bài toán $MVI(K, F)$ để nhận được các kết quả hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov đối với bất đẳng thức biến phân đa trị.

Hệ quả 3.6. *Giả sử F là toán tử đơn điệu, nửa liên tục trên và có giá trị lồi compắc khác rỗng trên $K \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó với mỗi $\varepsilon > 0$, bài toán $MVI(K, F_\varepsilon)$ có duy nhất nghiệm và các khẳng định sau đây là tương đương nhau:*

a) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon)$ *tồn tại.*

b) $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \|x(\varepsilon)\| < \infty$.

c) *Tập nghiệm $SMVI(K, F)$ của bài toán $MVI(K, F)$ khác rỗng.*

Hơn nữa, nếu một trong ba khẳng định trên được thỏa thì $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon)$ chính là hình chiếu của x^g lên tập nghiệm $SMVI(K, F)$.

Ta nói bài toán $MVI(K, F)$ thỏa mãn điều kiện bức nếu

$$(CO) : \begin{cases} \text{Tồn tại tập compắc } B \subset \mathcal{H} \text{ và } y^0 \in K \cap B \text{ sao cho} \\ \sup_{u \in F(x)} \langle u, y^0 - x \rangle < 0, \ \forall x \in K \setminus B. \end{cases}$$

Hệ quả 3.7. *Giả sử F là toán tử giả đơn điệu, nửa liên tục trên và có giá trị lồi compắc khác rỗng trên $K \subset \mathbb{R}^n$. Khi đó các khẳng định sau đây là tương đương nhau:*

a) *Với mọi $\varepsilon > 0$, bài toán $MVI(K, F_\varepsilon)$ có nghiệm và $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon)$ tồn tại, trong đó $x(\varepsilon)$ là nghiệm tùy ý của $MVI(K, F_\varepsilon)$.*

b) *Với mọi $\varepsilon > 0$, bài toán $MVI(K, F_\varepsilon)$ có nghiệm và $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \|x(\varepsilon)\| < \infty$, trong đó $x(\varepsilon)$ là nghiệm tùy ý của $MVI(K, F_\varepsilon)$.*

c) $SMVI(K, F) \neq \emptyset$.

Hơn nữa, nếu một trong ba khẳng định trên được thỏa thì $\lim_{\varepsilon \to 0^+} x(\varepsilon)$ là hình chiếu của x^g lên tập nghiệm của $MVI(K, F)$. Ngoài ra, nếu bài toán $MVI(K, F)$ thỏa mãn điều kiện bức (CO) thì tập nghiệm $SMVI(K, F_\varepsilon)$ của $MVI(K, F_\varepsilon)$ là compắc khác rỗng và

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} diam SMVI(K, F_\varepsilon) = 0.$$

3.5 Kết luận

Chương 3 đã cho thấy rằng, có thể mở rộng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov vào BTCB đặt không chỉnh.

Chúng ta đã chứng tỏ được bài toán hiệu chỉnh của BTCB đơn điệu luôn có duy nhất nghiệm và dãy nghiệm của các bài toán hiệu chỉnh hội tụ đến nghiệm của bài toán gốc, và cũng là nghiệm duy nhất của BTCB đơn điệu mạnh được xác định bởi hàm hiệu chỉnh.

Trong trường hợp BTCB giả đơn điệu, mặc dù các bài toán hiệu chỉnh không còn duy nhất nghiệm nữa, như cách làm cổ điển của phương pháp, nhưng chúng ta vẫn chứng tỏ được rằng, bất kỳ quỹ đạo nghiệm nào cũng hội tụ về cùng một nghiệm của bài toán gốc; điều này đã giải quyết được vấn đề đặt không chỉnh của BTCB đơn điệu và giả đơn điệu.

Một kết quả quan trọng khác, trong cả hai trường hợp BTCB đơn điệu và giả đơn điệu, chúng ta đã chứng minh được rằng: sự tồn tại nghiệm của bài toán gốc kéo theo sự tồn tại nghiệm của bài toán hiệu chỉnh và ngược lại.

Cũng trong chương này, chúng ta đã cung cấp một số thông tin về tính chất của tập nghiệm của bài toán hiệu chỉnh khi hàm cân bằng của bài toán gốc là giả đơn điệu và thỏa mãn điều kiện bức.

Phần cuối của chương trình bày việc áp dụng các kết quả hội tụ cho BTCB nói trên vào bất đẳng thức biến phân đa trị.

Các kết quả đạt được trong chương hoàn toàn có thể mở rộng vào không gian Hilbert vô hạn chiều như ta sẽ thấy ở chương sau.

Chương 4

Các phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề xấp xỉ cho BTCB trong không gian Hilbert

Chương 4, phần thứ nhất và phần thứ hai nghiên cứu phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề xấp xỉ (*the inexact Tikhonov and proximal point regularization methods*) cho BTCB giả đơn điệu trong không gian Hilbert thực. Phần thứ ba áp dụng các kết quả nói trên vào bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị giả đơn điệu. Hai phần cuối của chương trình bày một cách tiếp cận giải BTCB giả đơn điệu và bàn về tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov áp dụng cho BTCB đặt không chỉnh thông qua cách tiếp cận giải bài toán tối ưu hai cấp. Nội dung của chương được lấy từ các công trình 2), 5) và 7).

Trong chương này, ta luôn giả thiết K là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Hilbert thực $\mathcal{H}$ với tôpô yếu $\sigma := \sigma(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$ (thay cho tôpô τ nói chung đã đề cập trong Chương 2) và $f : K \times K \to \mathbb{R}$ là hàm cân bằng. Do trên không gian hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$, tôpô yếu và tôpô thông thường là trùng nhau, nên trong chương trước, ta không cần phân biệt rõ những khái niệm liên quan đến cấu trúc tôpô. Còn nếu xét trên không gian Hilbert $\mathcal{H}$ vô hạn chiều thì điều đó không còn đúng nữa, vì thế, để đảm bảo tính chính xác toán học, ta sẽ thêm vào những khái niệm có liên quan đến cấu trúc tôpô tính từ "yếu" khi xét theo tôpô yếu σ.

4.1 Phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov xấp xỉ

Như đã biết, khi sử dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov giải bài toán gốc $E(K, f)$, người ta thay thế nó bởi bài toán hiệu chỉnh

$$E(K, f_\varepsilon) : \begin{cases} \text{Tìm } x \in K \text{ sao cho} \\ f_\varepsilon(x, y) := f(x, y) + \varepsilon \langle x - x^g, y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K \end{cases}$$

với hy vọng là bài toán phụ này dễ giải hơn, mặc dù nó có thể không còn giả đơn điệu nữa.

Tuy nhiên điều này dường như không đủ sức thuyết phục, nghĩa là, nhiều khi các bài toán hiệu chỉnh còn khó giải hơn so với bài toán gốc. Vì vậy, để hạn chế phần nào nhược điểm nói trên, ta thay thế bất đẳng thức $f_\varepsilon(x, y) \geq 0$ trong bài toán $E(K, f_\varepsilon)$ bởi bất đẳng thức xấp xỉ

$$f_\varepsilon(x, y) \geq -\delta, \ \forall y \in K.$$

trong đó $\delta \geq 0$. Khi đó, bài toán $E(K, f_\varepsilon)$ trở thành bài toán hiệu chỉnh xấp xỉ

$$E_\delta(K, f_\varepsilon) : \begin{cases} \text{Tìm } x \in K \text{ sao cho} \\ f_\varepsilon(x, y) := f(x, y) + \varepsilon \langle x - x^g, y - x \rangle \geq -\delta, \ \forall y \in K. \end{cases}$$

Ký hiệu tập nghiệm của bài toán $E_\delta(K, f_\varepsilon)$ là $SE_\delta(K, f_\varepsilon)$ và gọi nghiệm của bài toán này là $\delta-$ nghiệm của bài toán $E(K, f_\varepsilon)$.

Nhận xét 4.1.1. Nếu x thỏa mãn $f_\varepsilon(x, y) \geq 0$ với mọi $y \in K$ thì nó sẽ thỏa mãn $f_\varepsilon(x, y) \geq -\delta$ với mọi $y \in K$. Do đó

$$SE(K, f_\varepsilon) \subseteq SE_\delta(K, f_\varepsilon), \ \forall \delta \geq 0.$$

Hiển nhiên

$$SE(K, f_\varepsilon) = SE_\delta(K, f_\varepsilon) \text{ khi } \delta = 0.$$

Bổ đề sau đây cho thấy mối quan hệ giữa nghiệm của bài toán hiệu chỉnh xấp xỉ $E_\delta(K, f_\varepsilon)$ và nghiệm của bài toán gốc $E(K, f)$.

Bổ đề 4.1. *Giả sử f giả đơn điệu trên K và $\varepsilon > 0$, $\delta \geq 0$ là các hằng số. Khi đó, với mọi $\bar{x} \in SE(K, f), x(\varepsilon) \in SE_\delta(K, f_\varepsilon)$ và $x^g \in K$, ta có*

a) $\|x^g - x(\varepsilon)\|^2 + \|x(\varepsilon) - \bar{x}\|^2 \leq \|x^g - \bar{x}\|^2 + 2\frac{\delta}{\varepsilon}$.

b) $SE_\delta(K, f_\varepsilon) \subset \overline{B}\left(0, \left\|\frac{\bar{x}+x^g}{2}\right\| + \sqrt{\left\|\frac{\bar{x}-x^g}{2}\right\|^2 + \frac{\delta}{\varepsilon}}\right) \cap K$.

c) $\|x(\varepsilon) - x^g\| \leq \left\|\frac{\bar{x}-x^g}{2}\right\| + \sqrt{\left\|\frac{\bar{x}-x^g}{2}\right\|^2 + \frac{\delta}{\varepsilon}}$.

Chứng minh. Do $\bar{x} \in SE(K, f)$ và f giả đơn điệu nên

$$f(\bar{x}, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, \bar{x}) \leq 0, \ \forall y \in K. \tag{4.1}$$

Vì $x(\varepsilon) \in SE_\delta(K, f_\varepsilon)$ nên

$$f(x(\varepsilon), y) + \varepsilon \langle x(\varepsilon) - x^g, y - x(\varepsilon)\rangle \geq -\delta, \ \forall y \in K. \tag{4.2}$$

Thay $y = x(\varepsilon)$ vào bất đẳng thức thứ hai trong (4.1) và $y = \bar{x}$ trong (4.2), ta nhận được

$$f(x(\varepsilon), \bar{x}) \leq 0 \quad \text{và} \quad f(x(\varepsilon), \bar{x}) + \varepsilon \langle x(\varepsilon) - x^g, \bar{x} - x(\varepsilon)\rangle \geq -\delta.$$

Suy ra

$$\frac{1}{2}\left[\|x^g - \bar{x}\|^2 - \|x^g - x(\varepsilon)\|^2 - \|x(\varepsilon) - \bar{x}\|^2\right] = \langle x(\varepsilon) - x^g, \bar{x} - x(\varepsilon)\rangle \geq -\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Do đó ta có a). Mặt khác

$$\|x(\varepsilon) - x^g\|^2 + \|[x(\varepsilon) - x^g] - [\bar{x} - x^g]\|^2 \leq \|\bar{x} - x^g\|^2 + 2\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Suy ra

$$\|x(\varepsilon) - x^g\|^2 - \langle x(\varepsilon) - x^g, \bar{x} - x^g\rangle \leq \frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Vậy

$$\begin{aligned}
\left\|x(\varepsilon) - \frac{\bar{x} + x^g}{2}\right\|^2 &= \left\|x(\varepsilon) - x^g - \frac{\bar{x} - x^g}{2}\right\|^2 \\
&= \|x(\varepsilon) - x^g\|^2 - \langle x(\varepsilon) - x^g, \bar{x} - x^g\rangle + \left\|\frac{\bar{x} - x^g}{2}\right\|^2 \\
&\leq \left\|\frac{\bar{x} - x^g}{2}\right\|^2 + \frac{\delta}{\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Từ đây, ta nhận được b) and c). □

Bổ đề dưới đây cho biết tính chất và cấu trúc của tập $\delta-$ nghiệm của bài toán hiệu chỉnh khi bài toán gốc có nghiệm.

Bổ đề 4.2. *Giả sử f giả đơn điệu K và thỏa mãn các giả thiết (A_1) và (A_2). Khi đó, nếu tập nghiệm của bài toán $E(K,f)$ khác rỗng thì tập $\delta-$ nghiệm $SE_\delta(K,f_\varepsilon)$ là khác rỗng và compắc yếu với mọi $\varepsilon > 0$ và $\delta \geq 0$.*

Chứng minh. Theo Định lý 2.4, chỉ cần tìm một vector $y^0 \in K$ sao cho tập

$$L_\delta(y^0, f_\varepsilon) := \{x \in K : f_\varepsilon(x, y^0) = f(x, y^0) + \varepsilon \left\langle x - x^g, y^0 - x \right\rangle \geq -\delta\}$$

bi chặn. Do $SE(K,f) \neq \emptyset$, có thể lấy $y^0 \in SE(K,f)$. Với mọi $x \in L_\delta(y^0, f_\varepsilon)$, ta có

$$f_\varepsilon(x, y^0) = f(x, y^0) + \varepsilon \left\langle x - x^g, y^0 - x \right\rangle \geq -\delta.$$

Sử dụng bất đẳng thức a) trong Bổ đề 4.1 với $x(\varepsilon) = x, \bar{x} = y^0$, ta nhận được

$$\|x^g - x\|^2 + \|x - y^0\|^2 \leq \|x^g - y^0\|^2 + 2\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

Suy ra

$$\|x - x^g\| \leq \sqrt{\|y^0 - x^g\|^2 + 2\frac{\delta}{\varepsilon}}$$

Vậy

$$\|x\| \leq \|x^g\| + \sqrt{\|y^0 - x^g\|^2 + 2\frac{\delta}{\varepsilon}},\ \forall x \in L_\delta(y^0, f_\varepsilon).$$

Chứng tỏ tập $L_\delta(y^0, f_\varepsilon)$ bị chặn. $\square$

Như chúng ta đã thấy trong chương trước, nếu f giả đơn điệu trên K thì hàm f_ε của bài toán hiệu chỉnh $EP(K, f_\varepsilon)$ nói chung là không giả đơn điệu trên K và tính duy nhất nghiệm của bài toán phụ này là không còn nữa, tuy nhiên bài toán xuất phát $E(K,f)$ ổn định đối với phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov theo nghĩa: bất kỳ dãy nghiệm nào của các bài toán hiệu chỉnh cũng hội về cùng một nghiệm của bài toán xuất phát khi cho tham số hiệu chỉnh ε dần tới 0. Định lý sau đây cho thấy dãy $\delta-$ nghiệm của các bài toán hiệu chỉnh sẽ hội tụ mạnh về nghiệm của bài toán gốc gần với nghiệm phỏng đoán x^g nhất khi $\varepsilon, \delta \to 0$. Điều này cho thấy rằng, BTCB giả đơn điệu vẫn ổn định đối với phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov xấp xỉ.

Định lý 4.3. *Giả sử f giả đơn điệu trên K, thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$ và tập nghiệm của bài toán $E(K, f)$ khác rỗng. Cho $\{\varepsilon_k\}$, $\{\delta_k\}$ là hai dãy số dương đơn điệu giảm về 0 và thỏa mãn $\frac{\delta_k}{\varepsilon_k} \to 0$ khi $k \to \infty$. Khi đó*

a) *Với mọi $k \in \mathbb{N}$, tập δ_k- nghiệm $SE_{\delta_k}(K, f_{\varepsilon_k})$ khác rỗng, compắc yếu và*

$$\|x^g - x^k\|^2 + \|x^k - \bar{x}\|^2 \leq \|x^g - \bar{x}\|^2 + 2\frac{\delta_k}{\varepsilon_k}, \tag{4.3}$$

trong đó $\bar{x} \in SE(K, f)$, $x^k \in SE_{\delta_k}(K, f_{\varepsilon_k})$ và $x^g \in K$.

b) *Dãy $\{x^k\}$, trong đó x^k được chọn tùy ý trong $SE_{\delta_k}(K, f_{\varepsilon_k})$, hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất x^* của BTCB $E(\widetilde{K}, g)$ với $\widetilde{K} := SE(K, f)$ và $g(x, y) := \langle x - x^g, y - x\rangle$. Hơn nữa, x^* chính là hình chiếu của x^g trên $SE(K, f)$.*

Chứng minh. a) Chỉ cần áp dụng các Bổ đề 4.1.a) và 4.2 với

$$x(\varepsilon) = x^k, \varepsilon = \varepsilon_k \text{ và } \delta = \delta_k.$$

b) Vì $SE(K, f)$ khác rỗng nên ta có thể lấy tùy ý $\bar{x} \in SE(K, f)$. Theo khẳng định a), tập δ_k- nghiệm của $E(K, f_{\varepsilon_k})$ là khác rỗng với mọi $k \in \mathbb{N}$. Lấy tùy ý $x^k \in SE_{\delta_k}(K, f_{\varepsilon_k})$. Khi đó, với mỗi $k \in \mathbb{N}$, ta có

$$\begin{cases} f(\bar{x}, x^k) \geq 0, \\ f_{\varepsilon_k}(x^k, \bar{x}) := f(x^k, \bar{x}) + \varepsilon_k \left\langle x^k - x^g, \bar{x} - x^k \right\rangle \geq -\delta_k. \end{cases}$$

Do f giả đơn điệu nên từ bất đẳng thức thứ nhất suy ra $f(x^k, \bar{x}) \leq 0$. Do đó, từ bất đẳng thức thứ hai, ta nhận được

$$g(x^k, \bar{x}) := \left\langle x^k - x^g, \bar{x} - x^k \right\rangle \geq -\frac{\delta_k}{\varepsilon_k}, \ \forall k. \tag{4.4}$$

Mặt khác, vì $\frac{\delta_k}{\varepsilon_k} \to 0$ nên nó bị chặn, tức là

$$\exists M > 0 : 0 \leq \frac{\delta_k}{\varepsilon_k} \leq M, \ \forall k.$$

Áp dụng các tính chất b) và c) trong Bổ đề 4.1 với $x(\varepsilon) = x^k, \varepsilon = \varepsilon_k, \delta = \delta_k$, ta có

$$\begin{aligned} x^k \in SE_{\delta_k}(K, f_{\varepsilon_k}) &\subset \overline{B}\left(0, \left\|\frac{\bar{x} + x^g}{2}\right\| + \sqrt{\left\|\frac{\bar{x} - x^g}{2}\right\|^2 + \frac{\delta_k}{\varepsilon_k}}\right) \cap K \\ &\subset \overline{B}\left(0, \left\|\frac{\bar{x} + x^g}{2}\right\| + \sqrt{\left\|\frac{\bar{x} - x^g}{2}\right\|^2 + M}\right) \cap K, \ \forall k \end{aligned}$$

và

$$\|x^k - x^g\| \le \left\|\frac{\bar{x} - x^g}{2}\right\| + \sqrt{\left\|\frac{\bar{x} - x^g}{2}\right\|^2 + \frac{\delta_k}{\varepsilon_k}}, \ \forall k. \tag{4.5}$$

Vì $\overline{B}\left(0, \left\|\frac{\bar{x}+x^g}{2}\right\| + \sqrt{\left\|\frac{\bar{x}-x^g}{2}\right\|^2 + M}\right) \cap K$ là tập compắc yếu nên có một dãy con $\{x^{k_j}\} \subseteq \{x^k\}$ sao cho

$$x^{k_j} \rightharpoonup x^* \in \overline{B}\left(0, \left\|\frac{\bar{x} + x^g}{2}\right\| + \sqrt{\left\|\frac{\bar{x} - x^g}{2}\right\|^2 + M}\right) \cap K.$$

Do x^{k_j} là $\delta_{k_j}-$ nghiệm của bài toán $E(K, f_{\varepsilon_{k_j}})$ nên

$$f_{\varepsilon_{k_j}}(x^{k_j}, y) = f(x^{k_j}, y) + \varepsilon_{k_j}\left\langle x^{k_j} - x^g, y - x^{k_j}\right\rangle \ge -\delta_{k_j}, \ \forall y \in K.$$

Bởi $\delta_{k_j} \searrow 0$, $\varepsilon_{k_j} \searrow 0$ và $f(., y)$ nửa liên tục trên yếu nên

$$0 \le \overline{\lim}_{k_j \to \infty} f_{\varepsilon_{k_j}}(x^{k_j}, y) \le \overline{\lim}_{k_j \to \infty} f(x^{k_j}, y) \le f(x^*, y), \ \forall y \in K.$$

Chứng tỏ $x^* \in SE(K, f) := \widetilde{K}$. Hơn nữa, sử dụng (4.4) với $k = k_j$, ta có

$$g(x^{k_j}, \bar{x}) := \left\langle x^{k_j} - x^g, \bar{x} - x^{k_j}\right\rangle \ge -\frac{\delta_{k_j}}{\varepsilon_{k_j}}, \ \forall k_j$$

và vì

$$0 \ge \overline{\lim}_{k_j \to \infty}\left\langle x^{k_j} - x^g, x^{k_j} - \bar{x}\right\rangle \ge \left\langle x^* - x^g, x^* - \bar{x}\right\rangle.$$

nên

$$g(x^*, \bar{x}) := \langle x^* - x^g, \bar{x} - x^*\rangle \ge 0.$$

Vì $\bar{x}$ là một phần tử tùy ý của $\widetilde{K}$ nên suy ra x^* là nghiệm của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$. Do g đơn điệu mạnh trên K chứa $\widetilde{K}$, vì vậy, bài toán $E(\widetilde{K}, g)$ có duy nhất nghiệm theo Định lý 2.3.b). Như vậy, ta đã chứng minh được $\{x^k\}$ bị chặn và bất kỳ điểm giới hạn yếu nào của nó cũng là nghiệm duy nhất x^* của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$. Do đó toàn bộ dãy $\{x^k\}$ phải hội tụ yếu về x^*. Thay $\bar{x} = x^*$ vào bất đẳng thức (4.5), ta được

$$\|x^k - x^g\| \le \left\|\frac{x^* - x^g}{2}\right\| + \sqrt{\left\|\frac{x^* - x^g}{2}\right\|^2 + \frac{\delta_k}{\varepsilon_k}}, \ \forall k.$$

Vì $\frac{\delta_k}{\varepsilon_k} \to 0$ khi $k \to \infty$ nên

$$\overline{\lim}_{k \to \infty}\|x^k - x^g\| \le \lim_{k \to \infty}\left(\left\|\frac{x^* - x^g}{2}\right\| + \sqrt{\left\|\frac{x^* - x^g}{2}\right\|^2 + \frac{\delta_k}{\varepsilon_k}}\right) = \|x^* - x^g\|.$$

Theo Định lý 1.2.d), dãy $\{x^k - x^g\}$ hội tụ mạnh về $x^* - x^g$, do đó $\{x^k\}$ cũng hội tụ mạnh về x^*. Hơn nữa, từ (4.3), ta có

$$\|x^k - x^g\|^2 \leq \|\bar{x} - x^g\|^2 + 2\frac{\delta_k}{\varepsilon_k}, \ \forall k.$$

Cho $k \to \infty$, ta nhận được

$$\|x^* - x^g\| \leq \|\bar{x} - x^g\|. \tag{4.6}$$

Theo Định lý 2.2, tập nghiệm $SE(K, f)$ lồi đóng yếu (nên đóng) và khác rỗng nên hình chiếu của x^g trên $SE(K, f)$ được xác định duy nhất; ký hiệu phần tử này bởi x'. Thay $\bar{x} = x'$ vào (4.6), ta nhận được

$$\|x^* - x^g\| \leq \|x' - x^g\|.$$

Suy ra $x^* = x'$. □

4.2 Phương pháp điểm gần kề xấp xỉ

Phương pháp điểm gần kề được đề xuất bởi B. Martinet [31] vào năm 1970 cho bất đẳng thức biến phân và được phát triển bởi R.T. Rockafellar [44] trong năm 1976 cho bao hàm thức đơn điệu cực đại. Cũng từ đây, phương pháp này trở thành một trong những phương pháp thông dụng nhất để giải rất nhiều bài toán trong các lĩnh vực khác nhau như phương trình phi tuyến, bài toán tối ưu, bất đẳng thức biến phân, ..., và đến năm 1999, A. Moudafi [34] đã mở rộng phương pháp điểm gần kề vào BTCB đơn điệu.

Trong phần này, chúng ta sẽ nghiên cứu thuật toán điểm gần kề xấp xỉ cho BTCB giả đơn điệu. Kết quả hội tụ của thuật toán này cho thấy, tương tự như phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, phương pháp điểm gần kề xấp xỉ có thể sử dụng được cho BTCB giả đơn điệu. Điểm khác biệt cơ bản của phương pháp điểm gần kề so với phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, đó là: tại mỗi bước lặp của phương pháp điểm gần kề, bài toán hiệu chỉnh phụ thuộc vào điểm lặp ở bước trước và tham số hiệu chỉnh $c_k > 0$ không cần dần đến 0. Cụ thể, xuất phát từ một điểm $x^0 := x^g$ cho trước, tại mỗi bước lặp $k = 1, 2, ...$, xét bài toán hiệu chỉnh xấp xỉ được cho bởi

$$E_{\delta_k}(K, f_k) : \begin{cases} \text{Tìm } x^k \in K \text{ sao cho} \\ f_k(x^k, y) \geq -\delta_k, \ \forall y \in K, \end{cases}$$

trong đó

$$f_k(x,y) := f(x,y) + c_k \left\langle x - x^{k-1}, y - x \right\rangle,$$

và $\delta_k \geq 0$ là sai số cho trước. Tương tự như ở phần trước, ta gọi một nghiệm của bài toán $E_{\delta_k}(K, f_k)$ là một δ_k- nghiệm của bài toán $E(K, f_k)$ và ký hiệu tập tất cả các δ_k- nghiệm bởi $SE_{\delta_k}(K, f_k)$.

Định lý dưới đây chỉ ra tính hội tụ của thuật toán điểm gần kề xấp xỉ cho BTCB giả đơn điệu. Trong quá trình chứng minh định lý, chúng tôi có sử dụng một vài kỹ thuật trong Tam-Yao-Yen [46] và R.T. Rockafellar [44]. Trước hết ta có bổ đề:

Bổ đề 4.4. (Xem [35, Lemma 2.2]) *Cho $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ và $\{\gamma_n\}$ các dãy số trong $\mathbb{R}_+$ sao cho $\{\gamma_n\} \in l^1$ và*

$$\alpha_{n+1} \leq \alpha_n - \beta_n + \gamma_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó $\{\alpha_n\}$ hội tụ và $\{\beta_n\} \in l^1$, trong đó

$$l^1 := \left\{ \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+ : \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < +\infty \right\}.$$

Định lý 4.5. *Giả sử f giả đơn điệu trên K, thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$ và bài toán $E(K, f)$ có nghiệm. Cho $\{c_k\}$ và $\{\delta_k\}$ là hai dãy số không âm sao cho $c_k \leq c < +\infty$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, $\delta_k \to 0^+$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{c_k} < +\infty$. Khi đó:*

a) *Với mọi $k \in \mathbb{N}$, tập δ_k- nghiệm $SE_{\delta_k}(K, f_k)$ là khác rỗng, compắc yếu và*

$$\|x^{k-1} - x^k\|^2 + \|x^k - \bar{x}\|^2 \leq \|x^{k-1} - \bar{x}\|^2 + 2\frac{\delta_k}{c_k}, \tag{4.7}$$

trong đó $\bar{x} \in SE(K, f)$ và $x^k \in SE_{\delta_k}(K, f_k)$.

b) *Dãy $\{x^k\}$, trong đó x^k được chọn tùy ý trong $SE_{\delta_k}(K, f_k)$, hội tụ yếu về một nghiệm nào đó của bài toán $E(K, f)$. Hơn nữa, nếu $\{x^k\}$ có một dãy con $\{x^{k_j}\}$ hội tụ mạnh về $x^* \in \mathcal{H}$ nào đó thì $x^* \in SE(K, f)$ và x^k hội tụ mạnh về x^*.*

Chứng minh. a) Sử dụng Bổ đề 4.2 với $x^g = x^{k-1} \in K$ và $\varepsilon = c_k > 0$, ta thấy tập δ_k- nghiệm $SE_{\delta_k}(K, f_k)$ của bài toán $E(K, f_k)$ là khác rỗng và compắc yếu với mọi $k = 1, 2, ...$ Để chứng minh bất đẳng thức (4.7) chỉ cần áp dụng Bổ đề 4.1.a) với

$$\varepsilon = c_k, x^g = x^{k-1}, x(\varepsilon) = x^k, \delta = \delta_k.$$

b) Cố định một điểm $\bar{x}$ bất kỳ trong tập nghiệm của bài toán $E(K, f)$. Lấy $x^k \in SE_{\delta_k}(K, f_k)$ với $k \geq 1$. Từ (4.7), ta có

$$\|x^k - \bar{x}\|^2 \leq \|x^{k-1} - \bar{x}\|^2 + 2\frac{\delta_k}{c_k}. \tag{4.8}$$

Do $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\delta_k}{c_k} < +\infty$ nên có thể áp dụng Bổ đề 4.4 với

$$\alpha_n = \|x^k - \bar{x}\|, \beta_n = 0, \gamma_n = 2\frac{\delta_k}{c_k},$$

ta nhận được

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - \bar{x}\| = \mu < \infty. \tag{4.9}$$

Sử dụng lần nữa bất đẳng thức (4.7), ta có thể viết

$$\|x^k - x^{k-1}\|^2 \leq \|x^{k-1} - \bar{x}\|^2 - \|x^k - \bar{x}\|^2 + 2\frac{\delta_k}{c_k}.$$

Do tính chất (4.9) và vì $\frac{\delta_k}{c_k} \to 0$ khi $k \to \infty$ nên

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x^{k-1}\| = 0. \tag{4.10}$$

Mặt khác, dãy $\left\{\sum_{j=1}^{k} \frac{\delta_j}{c_j}\right\}$ bị chặn, tức là

$$\exists M > 0 : 0 \leq 2\sum_{j=1}^{k} \frac{\delta_j}{c_j} \leq M,\ \forall k.$$

Từ đây và (4.8) suy ra rằng

$$\begin{aligned}
\|x^k - \bar{x}\|^2 \leq \|x^g - \bar{x}\|^2 + 2\sum_{j=1}^{k}\frac{\delta_j}{c_j} &\leq \|x^g - \bar{x}\|^2 + M, \forall k\\
\Rightarrow \|x^k - \bar{x}\| &\leq \sqrt{\|x^g - \bar{x}\|^2 + M},\ \forall k\\
\Rightarrow \|x^k\| &\leq \|\bar{x}\| + \sqrt{\|x^g - \bar{x}\|^2 + M},\ \forall k\\
\Rightarrow x^k \in SE_{\delta_k}(K, f_k) &\subset \overline{B}\left(0, \|\bar{x}\| + \sqrt{\|x^g - \bar{x}\|^2 + M}\right) \cap K,\ \forall k.
\end{aligned}$$

Do đó $\{x^k\}$ bị chặn nên sẽ có một dãy con $\{x^{k_j}\} \subseteq \{x^k\}$ sao cho

$$x^{k_j} \rightharpoonup x^* \in \overline{B}\left(0, \|\bar{x}\| + \sqrt{\|x^g - \bar{x}\|^2 + M}\right) \cap K.$$

Vì x^{k_j} là một $\delta_{k_j}-$ nghiệm của bài toán $E(K, f_{k_j})$ với mỗi k_j nên

$$f_{k_j}(x^{k_j}, y) = f(x^{k_j}, y) + c_{k_j}\left\langle x^{k_j} - x^{k_j-1}, y - x^{k_j}\right\rangle \geq -\delta_{k_j},\ \forall y \in K. \quad (4.11)$$

Bởi tính chất (4.10), tính nửa liên tục trên của $f(.y)$ và các điều kiện $0 < c_{k_j} < c < +\infty$, $\delta_{k_j} \to 0^+$ nên từ (4.11), ta có

$$0 \leq \overline{\lim}_{k_j\to\infty} f_{k_j}(x^{k_j}, y) \leq \overline{\lim}_{k_j\to\infty} f(x^{k_j}, y) \leq f(x^*, y),\ \forall y \in K.$$

Điều này có nghĩa là $x^* \in SE(K, f)$.

Bây giờ ta sẽ chứng tỏ x^* là điểm giới hạn yếu duy nhất của $\{x^k\}$. Thực vậy, giả sử x_1^* và x_2^* là hai điểm giới hạn yếu phân biệt của $\{x^k\}$. Khi đó $x_1^*, x_2^* \in SE(K, f)$ như ta thấy ở trên. Vì vậy ta có thể áp dụng (4.9) cho x_i^* $(i = 1, 2)$ đóng vai trò của $\bar{x}$ để nhận được

$$\lim_{k\to\infty} \|x^k - x_i^*\| = \mu_i,\ i = 1, 2. \quad (4.12)$$

Rõ ràng

$$2\left\langle x^k - x_1^*, x_1^* - x_2^*\right\rangle = \|x^k - x_2^*\|^2 - \|x^k - x_1^*\|^2 - \|x_1^* - x_2^*\|^2. \quad (4.13)$$

Vì x_1^* là điểm tụ yếu của $\{x^k\}$ nên từ (4.12) và (4.13), ta có

$$0 = 2\lim_{k\to\infty}\left\langle x^k - x_1^*, x_1^* - x_2^*\right\rangle = \mu_2^2 - \mu_1^2 - \|x_1^* - x_2^*\|^2.$$

Suy ra

$$\mu_2^2 - \mu_1^2 = \|x_1^* - x_2^*\|^2 > 0.$$

Đổi vai trò của x_1^* và x_2^* cho nhau ta cũng có $\mu_1^2 - \mu_2^2 > 0$. Điều mâu thuẫn này khẳng định tính duy nhất của x^*.

Để chứng minh khẳng định cuối, giả sử $\{x^k\}$ có một dãy con $\{x^{k_j}\}$ hội tụ mạnh về $x^* \in \mathcal{H}$ nào đó. Tương tự như trên, ta thấy $x^* \in SE(K, f)$. Áp dụng (4.8) với $\bar{x} = x^*$, ta nhận được

$$\|x^k - x^*\|^2 \leq \|x^{k-1} - x^*\|^2 + 2\frac{\delta_k}{c_k},\ \forall k \in \mathbb{N}. \quad (4.14)$$

Với mọi $\gamma > 0$, do $\lim_{k_j \to \infty} \|x^{k_j} - x^*\| = 0$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{c_k} < +\infty$ nên có thể tìm được $l \in \mathbb{N}$ sao cho

$$\|x^{k_l} - x^*\| \leq \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \quad \text{và} \quad \sum_{i=k_l+1}^{\infty} \frac{\delta_i}{c_i} \leq \frac{\gamma^2}{4}.$$

Do đó, với $k > k_l + 1$, từ (4.14) suy ra

$$\begin{aligned}
\|x^k - x^*\|^2 &\leq \|x^{k-1} - x^*\|^2 + 2\frac{\delta_k}{c_k} \\
&\leq \|x^{k-2} - x^*\|^2 + 2\left(\frac{\delta_k}{c_k} + \frac{\delta_{k-1}}{c_{k-1}}\right) \\
&\leq ... \\
&\leq \|x^{k_l} - x^*\|^2 + 2\left(\frac{\delta_k}{c_k} + \frac{\delta_{k-1}}{c_{k-1}} + ... + \frac{\delta_{k_l+1}}{c_{k_l+1}}\right) \\
&\leq \frac{\gamma^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2} = \gamma^2.
\end{aligned}$$

Vậy

$$\|x^k - x^*\| \leq \gamma, \ \forall k > k_l + 1.$$

Do đó, $\lim_{k \to \infty} \|x^k - x^*\| = 0$, tức là $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về x^*. □

Hệ quả 4.6. *Giả sử K là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$; f giả đơn điệu trên K và thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$; bài toán $E(K, f)$ có nghiệm. Cho $\{c_k\}$ và $\{\delta_k\}$ là hai dãy số dương sao cho $c_k < c < +\infty$, $\delta_k \to 0^+$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{c_k} < +\infty$. Khi đó:*

a) *Với mọi k, tập δ_k- nghiệm của bài toán $E(K, f_k)$ là khác rỗng và compắc.*

b) *Dãy $\{x^k\}$, với x^k là δ_k- nghiệm tùy ý của bài toán $E(K, f_k)$, hội tụ mạnh về một nghiệm nào đó của bài toán $E(K, f)$.*

Chứng minh. Áp dụng Định lý 4.5 và để ý đến tính chất, bất kỳ dãy bị chặn nào trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$ đều có dãy con hội tụ mạnh, ta có được các khẳng định của định lý. □

Nhận xét 4.2.1. Định lý 4.5 cho thấy rằng, mọi quỹ đạo của thuật toán điểm gần kề đều có chung một điểm giới hạn yếu. Tuy nhiên, việc tìm điểm giới hạn này là một việc khó khăn bởi sự hội tụ đó là không mạnh và các kết quả trong định lý nói trên không đưa ra được cách xác định được điểm giới hạn này. Để khắc phục hạn chế nói trên, Dinh-Muu-Hung [16] đã đưa ra một thuật toán, lai ghép giữa phương pháp điểm gần kề và phương pháp siêu phẳng cắt, nhằm tạo ra được sự hội tụ mạnh của dãy lặp cũng như chỉ ra cách xác định được điểm giới hạn của dãy. Thuật toán được mô tả như sau:

Giả sử $\delta_k \geq 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $x^g \in K$ là nghiệm phỏng đoán của bài toán $EP(K, f)$. Xuất phát từ $x^1 = x^g$, thuật toán xây dựng hai dãy lặp $\{x^k\}$ và $\{u^k\}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} u^k \in K : f_k(u^k, y) := f(u^k, y) + c_k \left\langle u^k - x^k, y - u^k \right\rangle \geq -\delta_k, \forall y \in K, \\ x^{k+1} = P_{B_k}(x^g), \end{cases} \tag{4.15}$$

trong đó $B_k := C_k \cap D_k$ với C_k và D_k là hai nửa không gian được xác định bởi

$$C_k := \left\{ z \in \mathcal{H} : \|u^k - z\|^2 \leq \|x^k - z\|^2 + 2\frac{\delta_k}{c_k} \right\},$$
$$D_k := \{z \in \mathcal{H} : \left\langle x^k - z, x^g - x^k \right\rangle \geq 0\}.$$

Định lý sau đây cho thấy các dãy lặp trong thuật toán nói trên, hội tụ mạnh đến cùng một điểm, chính là hình chiếu của x^g lên tập nghiệm $\widetilde{K} := SE(K, f)$ của bài toán $EP(K, f)$.

Định lý 4.7. (Xem [16, Theorem 3.1]) *Giả sử f giả đơn điệu trên K, thỏa mãn các giả thiết (A_1), (A_2) và bài toán $E(K, f)$ có nghiệm. Cho $\{c_k\}, \{\delta_k\}$ là hai dãy số sao cho $\infty > c' > c_k > c > 0$ với mọi $k \in \mathbb{N}$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$, trong đó c, c' là các hằng số cho trước. Khi đó, cả hai dãy $\{u^k\}$ và $\{x^k\}$ được xác định bởi* (4.15) *hội tụ mạnh tới hình chiếu của x^g trên tập nghiệm $SE(K, f)$ của bài toán $E(K, f)$.*

4.3 Áp dụng vào bất đẳng thức biến phân đa trị

Cho $F : \mathcal{H} \to 2^{\mathcal{H}}$ là ánh xạ đa trị giả đơn điệu, nửa liên tục trên yếu và có giá trị lồi compắc yếu khác rỗng trên K, trong đó $K \subseteq domF$ là tập lồi đóng khác rỗng. Xét bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị

$$MVI(K, F) : \begin{cases} \text{Tìm } x \in K \text{ và } u \in F(x) \text{ sao cho} \\ \langle u, y - x \rangle \geq 0, \ \forall y \in K. \end{cases}$$

Từ những phân tích trong Mục 3.4, đối với phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, ta có bài toán hiệu chỉnh của bài toán $MVI(K,F)$ là

$$MVI(K,F_\varepsilon):\begin{cases}\text{Tìm } x\in K \text{ và } u\in F_\varepsilon(x) \text{ sao cho}\\ \langle u, y-x\rangle \geq 0,\ \forall y\in K,\end{cases}$$

trong đó

$$F_\varepsilon(x):=F(x)+\varepsilon(x-x^g),\ \varepsilon>0.$$

Ta gọi điểm $x^k\in K$ là một δ_k- nghiệm của bài toán $MVI(K,F_{\varepsilon_k})$ với $\delta_k\geq 0$, nếu

$$\exists u^k\in F_{\varepsilon_k}(x^k):\left\langle u^k, y-x^k\right\rangle \geq -\delta_k,\ \forall y\in K.$$

Bằng cách đặt

$$f_\varepsilon(x,y):=f(x,y)+\varepsilon\left\langle x-x^g, y-x\right\rangle,$$

trong đó

$$f(x,y):=\max_{u\in F(x)}\left\langle u, y-x\right\rangle,$$

ta có thể áp dụng Định lý 4.3 vào bài toán $MVI(K,F)$ để nhận được hiệu chỉnh Tikhonov xấp xỉ cho bất đẳng thức biến phân đa trị.

Hệ quả 4.8. *Giả sử F là toán tử giả đơn điệu, nửa liên tục trên yếu, có giá trị lồi compắc yếu khác rỗng trên K và bài toán $MVI(K,F)$ có nghiệm. Lấy $\{\delta_k\}$ và $\{\varepsilon_k\}$ là hai dãy số dương đơn điệu giảm tới 0 và $\frac{\delta_k}{\varepsilon_k}\to 0$. Khi đó:*

a) *Với mọi k, tập δ_k- nghiệm của bài toán $MVI(K,F_{\varepsilon_k})$ khác rỗng và compắc yếu.*

b) *Dãy $\{x^k\}$, với x^k là δ_k- nghiệm bất kỳ của bài toán $MVI(K,F_{\varepsilon_k})$, hội tụ mạnh về nghiệm của bài toán $MVI(K,F)$, gần với nghiệm phỏng đoán x^g nhất.*

Tương tự, có thể áp dụng phương pháp điểm gần kề xấp xỉ vào bài toán $MVI(K,F)$. Trong trường hợp này, bài toán hiệu chỉnh xấp xỉ tại bước lặp k được xác định như sau

$$\begin{cases}\text{Tìm } x^k\in K \text{ và } u^k\in F_k(x^k) \text{ sao cho}\\ \left\langle u^k, y-x^k\right\rangle \geq -\delta_k,\ \forall y\in K.\end{cases}$$

trong đó

$$F_k(x) := F(x) + c_k(x - x^{k-1}).$$

Các hệ quả sau đây được suy trực tiếp từ các Định lý 4.5 và Hệ quả 4.6.

Hệ quả 4.9. *Giả sử F là toán tử giả đơn điệu, nửa liên tục trên yếu, có giá trị lồi compắc yếu khác rỗng trên K và bài toán $MVI(K,F)$ có nghiệm. Lấy $\{\delta_k\}$ và $\{c_k\}$ là hai dãy số dương sao cho $\delta_k \to 0^+$, $c_k < c < +\infty$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{c_k} < +\infty$. Khi đó:*

a) *Với mọi k, tập δ_k- nghiệm của bài toán $MVI(K,F_k)$ khác rỗng và compắc yếu.*

b) *Dãy $\{x^k\}$, với x^k là δ_k- nghiệm bất kỳ của bài toán $MVI(K,F_k)$, hội tụ yếu về một nghiệm nào đó của $MVI(K,F)$. Hơn nữa, nếu $\{x^k\}$ có một dãy con $\{x^{k_j}\}$ hội tụ mạnh tới $x^* \in \mathcal{H}$, thì x^* là nghiệm của $MVI(K,F)$ và toàn bộ dãy $\{x^k\}$ hội tụ mạnh về x^*.*

Hệ quả 4.10. *Giả sử K là tập lồi đóng khác rỗng trong không gian Euclide $\mathbb{R}^n$, F là toán tử giả đơn điệu, nửa liên tục trên, có giá trị lồi compắc khác rỗng trên K và bài toán $MVI(K,F)$ có nghiệm. Lấy $\{\delta_k\}$ và $\{c_k\}$ là hai dãy số dương sao cho $\delta_k \to 0^+$, $c_k < c < +\infty$ và $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{c_k} < +\infty$. Khi đó:*

a) *Với mọi k, tập δ_k- nghiệm của bài toán $MVI(K,F_k)$ khác rỗng và compắc.*

b) *Dãy $\{x^k\}$, với x^k là δ_k- nghiệm bất kỳ của bài toán $MVI(K,F_k)$, hội tụ mạnh về một nghiệm nào đó của $MVI(K,F)$.*

4.4 Giải BTCB giả đơn điệu theo cách tiếp cận giải bài toán tối ưu hai cấp

Như chúng ta đã biết, đối với BTCB đơn điệu, nhờ tính đơn điệu mạnh của các bài toán hiệu chỉnh, các thuật toán hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề được miêu tả trong những phần trước có thể dẫn đến những phương pháp giải chấp nhận được. Còn đối với BTCB giả đơn điệu, các bài toán hiệu chỉnh nói chung là không đơn điệu mạnh, thậm chí không giả đơn điệu, vì vậy các phương pháp giải đòi hỏi tính đơn điệu không thể áp dụng được trong trường hợp này. Tuy nhiên, đối với phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, sự kiện "điểm giới hạn của các quỹ đạo nghiệm của bài toán hiệu chỉnh là hình chiếu của nghiệm phỏng đoán x^g lên tập nghiệm $SE(K, f)$ của bài toán $E(K, f)$" đã đề xuất một cách tìm điểm giới hạn đó bằng việc giải bài toán tối ưu hai cấp

$$(BO): \ \min\{\|x - x^g\|^2 : x \in \widetilde{K} := SE(K, f)\}.$$

Vì khi f giả đơn điệu trên K, tập nghiệm $SE(K, f)$ là tập lồi nên (BO) là bài toán tìm cực tiểu của hàm lồi mạnh trên một tập lồi không phụ thuộc vào tham số hiệu chỉnh. Cho dù bài toán (BO) luôn có duy nhất nghiệm nhưng điều khó khăn nhất ở đây là miền ràng buộc $SE(K, f)$ không được cho dưới dạng tường minh như một bài toán tối ưu chuẩn tắc.

Đã có một số tác giả đưa ra những cách giải cho bài toán hai cấp (BO), chẳng hạn như: A. Moudafi [35] đưa ra phương pháp hàm phạt khi BTCB cấp dưới của (BO) đơn điệu, Dinh-Muu [15] đưa ra thuật toán hàm đánh giá cho một lớp BTCB giả đơn điệu,... và ở đây, chúng tôi sẽ trình bày một thuật toán giải bài toán (BO) khi BTCB cấp dưới giả đơn điệu, bằng cách kết hợp phương pháp *gradient* mở rộng được giới thiệu trong [14] với kỹ thuật siêu phẳng cắt đã được đề cập trong Nhận xét 4.2.1, nhằm minh chứng cho ý nghĩa của các kết quả mà chúng tôi đã làm được trong luận án.

Giả sử $SE(K, f) \neq \emptyset$, f giả đơn điệu và liên tục yếu trên K và $f(x, .)$ lồi, khả vi trên K với mỗi $x \in K$. Lấy một hàm $L : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ thỏa các điều kiện sau đây:

(i) $L(x, x) = 0$ và $\exists \beta > 0 : L(x, y) \geq \frac{\beta}{2}\|x - y\|^2, \ \forall x, y \in K$;

(ii) L liên tục yếu, $L(x, .)$ khả vi và lồi mạnh trên $\mathcal{H}$ với mỗi $x \in K$ và $\nabla_2 L(x, x) = 0$ với mỗi $x \in \mathcal{H}$.

Dựa trên Bổ đề 2.5 và Định lý 2.6 về nguyên lý bài toán phụ, Dinh-Muu-Hung đưa ra thuật toán lai ghép được miêu tả như sau:

Bước chuẩn bị. Chọn $\rho > 0$ và $\eta \in (0, 1)$. Xuất phát từ $x^1 := x^g \in K$ (trong đó x^g đóng vai trò nghiệm phỏng đoán). Nếu $x^1 \in SE(K, f)$ thì kết thúc quá trình tính toán và x^1 là nghiệm của bài toán (BO). Ngược lại, thực hiện bước lặp k với $k = 1$.

Bước lặp k ($k = 1, 2, ...$). Giả sử đã có x^k.

Bước 1. Tìm nghiệm y^k của bài toán quy hoạch lồi mạnh

$$\min\left\{f(x^k, y) + \frac{1}{\rho}L(x^k, y) : y \in K\right\} \qquad CO(x^k)$$

Nếu $y^k = x^k$ thì lấy $u^k := x^k$ và chuyển sang Bước 3. Ngược lại, chuyển sang Bước 2.

Bước 2 (*Armijo linesearch*). Tìm m_k nhỏ nhất trong các số nguyên không âm m thỏa

$$z^{k,m} := (1 - \eta^m)x^k + \eta^m y^k,$$
$$f(z^{k,m}, y^k) + \frac{1}{\rho}L(x^k, y^k) \leq 0.$$

Đặt $\eta_k := \eta^{m_k}$, $z^k := z^{k,m_k}$ và tính

$$\sigma_k = \frac{-\eta_k f(z^k, y^k)}{(1 - \eta_k)\|g^k\|^2}, \; u^k := P_K(x^k - \sigma_k g^k),$$

trong đó $g^k \in \partial_2 f(z^k, z^k)$ là dưới gradient của hàm lồi $f(z^k, .)$ tại z^k.

Bước 3. Với x^k và u^k đã có, xây dựng hai nửa không gian

$$C_k := \{y \in K : \|u^k - y\|^2 \leq \|x^k - y\|^2\};$$
$$D_k := \{y \in K : \langle x^g - x^k, y - x^k\rangle \leq 0\}.$$

Bước 4. Đặt $B_k := C_k \cap D_k$ và tính $x^{k+1} := P_{B_k}(x^g)$. Nếu $x^{k+1} \in SE(K, f)$ thì kết thúc tính toán quá trình và x^{k+1} là nghiệm của bài toán (BO). Ngược lại, gán $k := k + 1$ và quay lại Bước lặp k.

Định lý sau đây cho thấy tính hội tụ của dãy $\{x^k\}$, $\{u^k\}$ trong thuật toán nói trên.

Định lý 4.11. (Xem [16, Theorem 4.1]) *Giả sử f giả đơn điệu và liên tục yếu trên K; $f(x, .)$ lồi, khả dưới vi phân trên K với mỗi $x \in K$ và bài toán $E(K, f)$ có nghiệm. Khi đó*

a) $\|u^k - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \sigma_k^2\|g^k\|^2, \; \forall x^* \in SE(K, f), \; \forall k \in \mathbb{N}$.

b) *Cả hai dãy $\{x^k\}$, $\{u^k\}$ hội tụ mạnh về nghiệm duy nhất của bài toán hai cấp (BO).*

4.5 Tính ổn định

Ta đã thấy rằng, để giải BTCB giả đơn điệu đặt không chỉnh $E(K, f)$ bằng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov, có thể lấy giới hạn của một dãy nghiệm bất kỳ của các bài toán hiệu chỉnh. Do hàm hiệu chỉnh có thể không giả đơn điệu, các thuật toán đã biết không thể áp dụng để giải được bài toán hiệu chỉnh, mặc dù giới hạn nói trên có thể nhận được bằng cách giải bài toán quy hoạch lồi hai cấp

$$\min\{\|x - x^g\|^2 : \ x \in \widetilde{K} := SE(K, f)\}. \tag{4.16}$$

Ngay cả khi tập $\widetilde{K}$, do tính giả đơn điệu của f, là một tập lồi đóng nhưng nó không được cho dưới dạng tường minh như một bài toán quy hoạch toán học chuẩn tắc, nên những phương pháp giải đã biết của quy hoạch lồi không thể áp dụng một cách trực tiếp vào bài toán này. Tuy nhiên, chúng ta có thể vượt qua được khó khăn này với việc sử dụng thuật toán đã được trình bày trong phần trước để tính điểm giới hạn của các dãy $\{x^k\}$ và $\{u^k\}$ thông qua giải bài toán tối ưu hai cấp (BO). Do hàm mục tiêu $\|x - x^g\|^2$ lồi mạnh và miền ràng buộc $\widetilde{K}$ lồi nên bài toán này có duy nhất nghiệm.

Với lý do đó, dưới đây ta sẽ chứng tỏ rằng, phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov có thể sử dụng vào BTCB đặt không chỉnh. Muốn như vậy, ta phải chứng minh được bài toán (4.16) là bài toán đặt chỉnh theo nghĩa, nó có duy nhất nghiệm và nghiệm này phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu của bài toán gốc.

Thật vậy, giả sử $\mathcal{H}$ là không gian Hilbert với tôpô τ; T là không gian Banach; $K : T \to 2^{\mathcal{H}}$ là toán tử đa trị có giá trị lồi đóng khác rỗng; và f giả đơn điệu và thỏa mãn các giả thiết $(A_1), (A_2)$ với mỗi $t \in T$. Xét BTCB phụ thuộc vào tham số, có dạng

$$EP(t) : \ \text{Tìm } x(t) \in K(t) : f(x(t), y) \geq 0, \ \forall y \in K(t).$$

Tập nghiệm của bài toán này được ký hiệu là $\widetilde{K}(t)$, theo Định lý 2.2, đó là một tập lồi đóng với mỗi $t \in T$. Khi đó bài toán tối ưu hai cấp được cho dưới dạng

$$BO(t) : \ \min\{\|x - x^g\|^2 : \ x \in \widetilde{K}(t)\}.$$

Giả sử $\widetilde{K} = \widetilde{K}(0)$ và ánh xạ $\widetilde{K}(.)$ liên tục có giá trị khác rỗng trong một lân cận của $0 \in T$ thì nghiệm duy nhất $x(t)$ của bài toán $BO(t)$ liên tục tại 0, theo định lý cực đại Berge. Chứng tỏ bài toán (4.16) là đặt chỉnh.

Sau đây, ta xét một trường hợp đặc biệt về ánh xạ tập nghiệm $\widetilde{K}(.)$ nửa liên tục trên. Giả sử F là ánh xạ đa trị từ không gian Banach X vào không gian Banach T và $K = F^{-1}(0)$. Xét bài toán

$$(P_t) : \begin{cases} \text{Tìm } \; x(t) \in F^{-1}(t) \; \text{ sao cho} \\ f(x(t), x) \geq 0, \; \forall x \in F^{-1}(t). \end{cases}$$

Ta vẫn ký hiệu tập nghiệm của bài toán này là $\widetilde{K}(t)$. Ta cần đến bổ đề sau:

Bổ đề 4.12. (Xem [36, Lemma 1]). *Giả sử X, T là các không gian Banach phản xạ và $F : X \to 2^T$ là ánh xạ đa trị thỏa mãn các điều kiện*

i) *F lồi và đóng trong $X \times T$;*

ii) *$F(X) = T$;*

iii) *$F^{-1}(0)$ bị chặn.*

Khi đó, với mỗi lân cận bị chặn V_0 của $0 \in T$, tồn tại tập compắc $B \subset X$ sao cho $F^{-1}(t) \subset B$ với mọi $t \in V_0$ và F^{-1} nửa liên tục trên trên V_0.

Các định lý sau đây về tính nửa liên tục trên của ánh xạ tập nghiệm đã được chứng minh trong [36] cho trường hợp hàm cân bằng f đơn điệu. Chúng tôi sẽ mở rộng nó cho bài toán (P_t) với f là giả đơn điệu và $X = \mathcal{H}$.

Định lý 4.13. *Giả sử f giả đơn điệu trên $\mathcal{H}$ và thỏa các giả thiết $(A_1), (A_2)$ với mỗi $t \in T$; ánh xạ $F : \mathcal{H} \to 2^T$ thỏa các điều điều kiện trong Bổ đề 4.12. Khi đó sẽ với mỗi lân cận bị chặn V_0 của $0 \in T$ sao cho bài toán (P_t) có nghiệm với mỗi $t \in V_0$ và ánh xạ $\widetilde{K}(.)$ là nửa liên tục trên trên V_0.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 4.12, ánh xạ F^{-1} là lồi đóng và hơn nữa, là nửa liên tục trên trên V_0. Hơn nữa, $F^{-1}(V_0)$ được chứa trong một tập đóng bị chặn B nào đó. Lấy $x(0) \in F^{-1}(0) = K$. Khi đó

$$L_t(x(0), f) = \{x(t) \in F^{-1}(t) : f(x(t), x(0)) \geq 0\} \subseteq B, \; \forall t \in V_0$$

chứng tỏ $L_t(x(0), f)$ bị chặn nên bài toán (P_t) có nghiệm với mỗi $t \in V_0$, theo Định lý 2.4. Xét hàm số

$$h(t, x') := \max\{-f(x, x') : x \in F^{-1}(t)\}.$$

Có thể thấy

$$x^0 \in \widetilde{K}(t) \Leftrightarrow x^0 \in F^{-1}(t) \text{ và } h(t, x^0) \geq 0.$$

Do f nửa liên tục dưới theo biến thứ hai và F^{-1} nửa liên tục trên trên V_0 nên theo định lý cực đại Berge, h nửa liên tục trên trên $V_0 \times \mathcal{H}$. Vì $\widetilde{K}(t)$ được chứa trong tập compắc B, vì vậy theo Hệ quả 1.17, để chỉ ra tính nửa liên tục trên của ánh xạ tập nghiệm $\widetilde{K}(.)$, ta phải chứng tỏ đồ thị của nó đóng. Thực vậy, cho $(t^0, x^0) \notin gph\widetilde{K}$. Khi đó

$$x^0 \notin F^{-1}(t^0) \text{ hoặc } h(t^0, x^0) < 0 \text{ hoặc cả hai.}$$

Khi đó, bởi tính đóng của $F^{-1}(t^0)$ và tính nửa liên tục trên của h, tồn tại lân cận $V \times U$ của (t^0, x^0) sao cho

$$x \notin F^{-1}(t) \text{ hoặc } h(t, x) < 0 \text{ hoặc cả hai.}$$

Chứng tỏ $(V \times U) \cap gph\widetilde{K} = \emptyset$. $\square$

Để minh họa kết quả trên, ta xét một ví dụ, trong đó $F(x) := M - G(x)$ với G là ánh xạ từ $\mathcal{H}$ vào T và M là tập con của T. Khi đó nếu M là nón lồi đóng và G thỏa mãn các tính chất

i) G liên tục và $-G(\mathcal{H}) + M = T$;

ii) G là $M-$ lồi trên X, tức là

$$G(\lambda x + (1-\lambda)y) \in \lambda G(x) + (1-\lambda)G(y) + M, \ \forall x, y \in \mathcal{H}, \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

thì tất cả các điều kiện cần thiết cho F đều được thỏa. Thật vậy, từ định nghĩa của F và điều kiện i) có thể thấy ngay $F(\mathcal{H}) = T$. Mặt khác

$$x \in F^{-1}(t) \Leftrightarrow t \in F(x) = M - G(x) \Leftrightarrow G(x) + t \in M$$

nên

$$F^{-1}(t) = \{x \in \mathcal{H} : G(x) + t \in M\}.$$

Do M là nón lồi đóng và điều kiện ii), $gphF$ là một nón lồi đóng nên $\|F^{-1}\| := \sup_{t\in domF^{-1}\setminus\{0\}} \frac{d_{F(t)}(0)}{\|t\|}$ hữu hạn, vì vậy, $F^{-1}(0) = \{x \in \mathcal{H} : G(x) \in M\}$ bị chặn (xem [17, Lemma 1]).

Tiếp theo, chúng ta xét đến tính liên tục của ánh xạ sau đây

$$\widetilde{K}_\delta(t) := \begin{cases} \widetilde{K}(0) \text{ nếu } t = 0, \\ \left\{x_\delta \in F^{-1}(t) : f(x_\delta, x) \geq \delta, \forall x \in F^{-1}(t) \text{ nếu } t \neq 0\right\}. \end{cases}$$

Lý do để chúng ta quan tâm đến tính liên tục của ánh xạ này là bởi trong thực tế, thay vì đi tìm nghiệm chính xác của bài toán (P_0) ta tìm $\delta-$ nghiệm của bài toán (P_t) (xem các Mục 4.1 và 4.2).

Lưu ý rằng, nói chung, ánh xạ $\widetilde{K}$ là không nửa liên tục dưới tại 0. Tuy nhiên, đối với ánh xạ $\widetilde{K}_\delta$, ta có kết quả sau:

Định lý 4.14. *Với các giả thiết như trong Định lý 4.13, ánh xạ $\widetilde{K}_\delta$ là nửa liên tục dưới tại* 0.

Chứng minh. Chứng minh tương tự như chứng minh Định lý 2 trong [36]. □

Các điều kiện tổng quát đảm bảo cho tính nửa liên tục trên của ánh xạ tập nghiệm của bài toán cân bằng có tham số có thể tìm thấy trong [1] hoặc các tài liệu liên quan khác.

4.6 Kết luận

Chương 4 trình bày việc sử dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề xấp xỉ vào việc giải BTCB giả đơn điệu trong không gian Hilbert, qua đó cho ta thấy, có thể phát triển các kết quả đã đạt được trong Chương 3 vào không gian vô hạn chiều.

Như đã biết, để giải BTCB $E(K, f)$, ta thay thế nó bởi dãy bài toán hiệu chỉnh $E(K, f_{\varepsilon_k})$ hay $E(K, f_k)$ với hy vọng là các bài toán phụ này dễ giải hơn bài toán gốc. Tuy nhiên điều đó không phải khi nào cũng đúng bởi trong trường hợp BTCB giả đơn điệu, các bài toán hiệu chỉnh có thể không còn duy nhất nghiệm, thậm chí là tập nghiệm của chúng không lồi, vì thế để khắc phục phần nào nhược điểm này, ta thay thế các bất đẳng thức chính xác

$$f_{\varepsilon_k}(x^k, y) \geq 0 \text{ hoặc } f_k(x^k, y) \geq 0$$

trong các bài toán hiệu chỉnh nói trên bởi các bất đẳng thức xấp xỉ

$$f_{\varepsilon_k}(x^k, y) \geq -\delta \text{ hay } f_k(x^k, y) \geq -\delta \text{ với } \delta \geq 0.$$

Chúng ta đã chứng tỏ được rằng, bài toán hiệu chỉnh xấp xỉ có nghiệm khi bài toán gốc có nghiệm và bất kỳ dãy nghiệm nào của các bài toán hiệu chỉnh xấp xỉ cũng hội tụ về cùng một nghiệm của bài toán gốc; nghiệm này cũng chính là hình chiếu của nghiệm phỏng đoán lên tập nghiệm của bài toán $E(K, f)$ trong trường hợp sử dụng phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov.

Cũng như trong chương trước, chương này cũng đã trình bày việc áp dụng các kết quả hội tụ nói trên vào bất đẳng thức biến phân đa trị giả đơn điệu.

Để thấy được ý nghĩa các kết quả đã đạt được trong luận án, hai phần cuối của chương trình bày một cách giải BTCB giả đơn điệu và bàn về tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov áp dụng cho BTCB đặt không chỉnh thông qua cách tiếp cận giải bài toán tối ưu hai cấp.

Kết luận chung

Các kết quả nhận được trong luận án gồm:

1) Đưa ra các điều kiện về sự tồn tại nghiệm, sự duy nhất nghiệm và một số tính chất về tập nghiệm của BTCB (Định lý 2.3, 2.4).

2) Chứng tỏ tính hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cho BTCB đơn điệu (Định lý 3.1, 3.2): Bài toán hiệu chỉnh của BTCB gốc $E(K, f)$ luôn có duy nhất nghiệm và quỹ đạo nghiệm của nó hội tụ về nghiệm của bài toán gốc và cũng là nghiệm duy nhất của BTCB $E(\widetilde{K}, g)$, trong đó $\widetilde{K} := SE(K, f)$ và g là hàm hiệu chỉnh.

3) Chứng tỏ tính hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov cho BTCB giả đơn điệu (Định lý 3.3, 3.5): Bài toán hiệu chỉnh có nghiệm khi và chỉ khi bài toán gốc $E(K, f)$ có nghiệm và mặc dù bài toán hiệu chỉnh không duy nhất nghiệm nhưng bất kỳ quỹ đạo nghiệm nào cũng hội tụ đến cùng một nghiệm của bài toán gốc và cũng là nghiệm duy nhất của bài toán $E(\widetilde{K}, g)$.

4) Mô tả cấu trúc và tính chất của tập nghiệm của bài toán hiệu chỉnh khi bài toán $E(K, f)$ là giả đơn điệu và thỏa điều kiện bức (Định lý 3.4, 3.5): compắc, khác rỗng và đường kính của tập nghiệm dần đến 0 khi tham số hiệu chỉnh dần đến 0.

5) Chứng tỏ tính hội tụ của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov xấp xỉ cho BTCB giả đơn điệu (Bổ đề 4.1, 4.2 và Định lý 4.3): Nếu bài toán gốc có nghiệm thì bài toán hiệu chỉnh xấp xỉ cũng có nghiệm và bất kỳ quỹ đạo nghiệm xấp xỉ nào cũng hội tụ mạnh đến nghiệm duy nhất của BTCB $E(\widetilde{K}, g)$.

6) Chứng tỏ tính hội tụ của phương pháp điểm gần kề xấp xỉ cho BTCB giả đơn điệu (Định lý 4.5, Hệ quả 4.6): Nếu bài toán gốc có nghiệm thì bài

toán hiệu chỉnh cũng có nghiệm và bất kỳ quỹ đạo nghiệm xấp xỉ nào cũng hội tụ yếu đến cùng một nghiệm của $E(K, f)$.

7) Áp dụng các kết quả đã đạt được vào bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị (Hệ quả 3.6, 3.7, 4.8, 4.9, 4.10) và bài toán tối ưu hai cấp (Định lý 4.13, 4.14).

8) Đưa ra các ví dụ minh họa trong các chương 2, 3 và 4.

Luận án đã đề cập đến những vấn đề sau:

1) Nghiên cứu các phương pháp giải ổn định cho BTCB đặt không chỉnh (theo nghĩa, bài toán không duy nhất nghiệm và nghiệm xấp xỉ của nó không phụ thuộc liên tục vào dữ kiện ban đầu), đặc biệt chú trọng đến phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề.

2) Nghiên cứu sự hội tụ của các phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov và điểm gần kề áp dụng cho BTCB đơn điệu và giả đơn điệu, đặc biệt là giả đơn điệu.

3) Áp dụng các kết quả nghiên cứu vào bất đẳng thức biến phân đa trị và bài toán tối ưu hai cấp.

4) Nghiên cứu tính ổn định của phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov đối với BTCB đặt không chỉnh.

Các hướng nghiên cứu tiếp theo

Các hướng nghiên cứu và những bài toán mở có thể tiếp tục nghiên cứu dựa trên phương pháp tiếp cận và kết quả của luận án cho các trường hợp sau:

1) Kết hợp các phương pháp giải đã biết đối với BTCB, tạo ra những phương pháp giải lai ghép mới có tính ổn định và cho ra được kết quả tốt hơn.

2) Áp dụng những kết quả thu được trong luận án vào các mô hình cân bằng giả đơn điệu nảy sinh trong thực tế.

3) Nghiên cứu kỹ hơn về tính ổn định của các BTCB giả đơn điệu thông qua cách tiếp cận bài toán tối ưu hoặc cân bằng hai cấp.

4) Trong bài viết nổi tiếng của R.T. Rokafellar [44], ông đã đưa ra một thuật toán điểm gần kề để giải bài toán: "Tìm không điểm của một toán tử đa trị đơn điệu cực đại trong không gian Hilbert". Phát triển các kết quả này, bằng cách sử dụng những phương pháp giải trong luận án để giải quyết bài toán nói trên trong trường hợp toán tử đa trị là giả đơn điệu.

Danh mục các công trình liên quan đến luận án đã công bố

1) P.G. Hưng, *Hiệu chỉnh Tikhonov BTCB (đơn điệu)*, Thông báo khoa học, Đại học Đà Lạt (2009) 147-152.

2) P.G. Hưng, *Tikhonov Regularization and Proximal Point Methods for Solving Pseudomonotone Equilibrium Problem*, Kỷ yếu Hội thảo lần thứ nhất CNTT và Toán ứng dụng, Đại học Nha Trang (2011) 106-116.

3) P.G. Hung, L.D. Muu, *The Tikhonov Regularization Extended to Equilibrium Problems Involving Pseudomonotone Bifunctions*, Nonlinear Analysis, Serial A: Theory, Methods and Applications 74 (2011) 6121-6129.

4) P.G. Hung, L.D. Muu, *The Tikhonov Regularization Method for Pseudomonotone Equilibrium Problems*, Journal of Science, Universty of Dalat 3 (2012) 45-50.

5) P.G. Hung, L.D. Muu, *On Inexact Tikhonov and Proximal Point Regularization Methods for Pseudomonotone Equilibrium Problems*, Vietnam Journal of Mathematics 40 (2012) 255-274.

6) P.G. Hung, L.D. Muu, *On Inexact Tikhonov and Proximal Point Regularization Methods for Pseudomonotone Equilibrium Problems (Summary)*, Journal of Science, Universty of Dalat 3 (2012) 51-56.

7) B.V. Dinh, L.D. Muu, P.G. Hung, *Bilevel Optimization As a Regularization Approach to Pseudomonotone Equilibrium Problems*, Preprint submitted to J. of Numerical Functional Analysis and Optimization, 2013.

Tài liệu tham khảo

Tiếng Anh

[1] L.Q. Anh, P.Q. Khanh (2008), *Semicontinuity of the Approximate Solution Sets of Multivalued Quasiequilibrium Problems*, Numer. Funct. Anal. Optim. 29: 24-42.

[2] J.B. Aubin, I. Ekeland (1984), *Applied Nonlinear Analysis*, John Wiley and Sons.

[3] J.P. Aubin, H. Frankowska (1990), *Set-Valued Analysis*, Springer.

[4] H.H. Bauschke, P.L. Combettes (2010), *Convex Analysis & Monotone Operator Theory in Hilbert Spaces*, Springer.

[5] C. Berge (1963), *Topological Spaces*, MacMillan, New York.

[6] M. Bianchi, S. Schaible (1996) *Generalized Monotone Bifuntions and Equilibrium Problems*, J. Optim. Theory Appl. 90: 31-43.

[7] M. Bianchi, S. Schaible (2004), *Equilibrium Problems under Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, J. Optim. Theory Appl. 30: 121-134.

[8] G. Bigi, M. Castellani, M. Pappalardo, M. Passacantando (2013), *Existence and Solution Methods for Equilibria*, European J. of Operational Research 227: 1-11.

[9] E. Blum, W. Oettli (1994), *From Optimization and Variational Inequalities to Equilibrium Problems*, Math. Student 63: 127-169.

[10] H. Brezis (1987), *Analyse Fonctionnelle: Theórie et Applications*, MASSON.

[11] N. Buong (2009), *Regularization Inertial Proximal Point Algoritm for Convex Feasility Problems in Banach Spaces*, Int. Journal of Math. Anal. 3: 549-561.

[12] Y. Censor, A. Lent (1981), *An Iterative Row-Action Method for Interval Convex Programming*, J. Optim. Theory Appl. 34: 321-353.

[13] G. Cohen (1998), *Auxiliary Problem Principle Extended to Variational Inequalities*, J. Optim. Theory Appl. 59: 325-333.

[14] S. Dempe (2002), *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Academic Press, Dordrecht.

[15] B.V. Dinh, L.D. Muu (2011), *On Penalty and Gap Function Methods for Bilevel Equilibrium Problems*, Hindawi Publishing Corporation, J. of Appl. Math, Article ID 646452, DOI: 10.1155/2011/646452.

[16] B.V. Dinh, L.D. Muu, P.G. Hung (2013), *Bilevel Optimization As a Regularization Approach to Pseudomonotone Equilibrium Problems*, Preprint submitted to J. of Numerical Functional Analysis and Optimization.

[17] P.C. Duong, H. Tuy (1978), *Stability, Subjectivity and Local Invertibility of Non Differentable Mappings*, Tom 3, No 1, ACTA Mathematica Vietnamica.

[18] F. Facchinei, J.S. Pang (2003), *Finite−Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer, New York.

[19] K. Fan (1972), *A Minimax Inequality and Applications*, Academic Press, New York. In Inequality III: 103-113.

[20] N.T. Hao (2006), *Tikhonov Regularization Algorithm for Pseudomonotone Variational Inequalites*, Acta Math. Vietnam. 31: 283-289.

[21] AN. Iusem, W. Sosa (2010), *On the Proximal Point Method for Equilibrium Problems in Hilbert Spaces*, Optimization 59: 1259-1274.

[22] V.K. Ivanov, V.V. Vasin, V.P. Tanana (1978), *Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications*, Moscow.

[23] I.V. Konnov (2001), *Combined Relaxation Methods for Variational Inequalities*, Springer.

[24] I.V. Konnov (2003), *Application of the Proximal Point Method Nonmonotone Equilibrium Problems*, J. Optim. Theory Appl. 119: 317-333.

[25] I.V. Konnov, O.V. Pinyagina (2003), *D-Gap Functions and Descent Methods for a Class of Monotone Equilibrium Problems*, Lobachevskii Journal of Mathematics, 13: 57-65.

[26] I.V. Konnov, M.S.S. Ali, E.O. Mazukevich (2006), *Regularization of Nonmonotone Variational Inequalities*, J. Optim. Theory Appl. 53: 311-330.

[27] I.V. Konnov (2009), *Regularization Methods for Nonmonone Equilibrium Problems*, J. Nonlinear and Convex Anal. 10: 93-101.

[28] I.V. Konnov, D.A. Dyabilkin (2011), *Nonmonotone Equilibrium Problems: Coercivity Conditions And Weak Regularization*, J. Glob. Optim. 49: 575-587.

[29] G.M. Korpelevich (1976), *The Extragradient Method for Finding Saddle Points and Other Problems*, Ekon. Math. Method 12: 747-756.

[30] M.M. Lavrant'ev (1967), *Some Improperly Posed Problems in Mathematical Physics*, Springer, Verlag.

[31] B. Martinet (1970), *Regularisation d'inÉquations Variationelles par Approximations Successives*, Revue Francaise d'Informatiques et de Recherche Opérationelle. 4: 154-159.

[32] G. Mastroeni (1999), *Minimax and Extremum Problems Associated to a Variational Inequality*, Rendiconti del Circolo Matematico di Parlemo, Serie II. Suppl. 58: 185-196.

[33] G. Mastroeni (2000), *On Auxiliary Principle for Equilibrium Problems*, Pubblicazione del Diparrimento di Matemtica dell'Universita di Pisa 3: 244-258.

[34] A. Moudafi (1999), *Proximal Point Algorithm Extended to Equilibrium Problems*, J. of Natural Geometry 15: 91-100.

[35] A. Moudafi (2010), *Proximal Methods for a Class of Bilevel Monotone*, J. Glob. Optim. 47: 287-292.

[36] L.D. Muu (1984), *Stability Property of a Class of Variational Inequality*, Optimization 15: 347-351.

[37] L.D. Muu, W. Oettli (1992), *Convergence of an Adaptive Penalty Scheme for Finding Constrained Equilibria*, Nonlinear Anal.: TMA. 18: 1159-1166.

[38] L.D. Muu, N.V. Quy, V.H. Nguyen (2007), *On Nash-Cournot Oligopolistic Market Equilibrium Models with Concave Cost Functions*, J. Glob. Optim. 41: 351-364.

[39] L.D. Muu, T.D. Quoc (2009), *Regularization Algorithms for Solving Monotone Ky Fan Inequalities with Application to a Nash-Cournot Equilibrium Model*, J. Optim. Theory Appl. 142: 185-204.

[40] L.D. Muu, T.D. Quoc (2010), *One Step from D.C. Optimization to D.C. Mixed Variational Inequalities*, Optimization 59: 63-76.

[41] M.A. Noor, K.I. Noor (2004), *On Equlibrium Problems*, Applied Mathematics E-Notes 4: 125-132.

[42] M.A. Noor (2004). *Auxiliary Principle Technique for Equilibrium Problems*, J. of Optim. Theory and Appl. 122: 371-386.

[43] T.D. Quoc, L. D. Muu (2012), *Iterative Methods for Solving Monotone Equilibrium Problems Via Dual Gap Functions*, Comput. Optim. Appl. DOI 10.1007/s10589-010-5360-4.

[44] R.T. Rockafellar (1976), *Monotone Operators and the Proximal Point Algorithm*, SIAM J. Control and Optim. 5: 877-898.

[45] R.T. Rockafellar (1997), *Convex Analysis*, Publish by Princeton Universty Press. Princeton, New Jersey.

[46] N.N. Tam, J.C. Yao, N.D. Yen (2008), *Solution Methods for Pseudomonotone Variational Inequalities*, J. Optim. Theory Appl. 138: 253-273.

[47] A. Tada, W. Takahashi (2007), *Weak and Strong Convergence Theorem for Nonexpansive Mapping and Equilibrium Problem.* J. Optim. Theory and Appl. 133: 359-370.

[48] A.N. Tikhonov (1963), *On the Solutions of Ill-Posed Problems and the Method of Regularization*, Dokl. Akad. Nauk SSSA, 151: 501-504.

[49] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin (1977), *Solutions of Ill-Posed Problems*, John Wiley and Sons, New York.

[50] H. Tuy (1998), *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publisher.

[51] N.T.T. Van, V.H. Nguyen, J.J. Strodiot (2009), *A Bundle Method for Solving Equilibrium Problems*, Math. Prog. 116: 529-552.

Tiếng Việt

[52] Phạm Kỳ Anh, Nguyễn Bường (2005), *Bài toán đặt không chỉnh*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[53] Đỗ Văn Lưu, Phan Huy Khải (2000), *Giải tích lồi*, NXB Khoa học & Kỹ thuật, Hà Nội.

[54] Lê Dũng Mưu, Nguyễn Văn Hiền, *Nhập môn Giải tích lồi ứng dụng*, NXB Khoa học & Công nghệ (Sẽ xuất bản).

[55] Lê Dũng Mưu (1998), *Nhập môn Các phương pháp tối ưu*, NXB Khoa học & Kỹ thuật, Hà Nội.

[56] Hoàng Tụy (2006), *Lý thuyết tối ưu*, Bài giảng Cao học Viện Toán học Việt Nam, Hà Nội.

[57] Nguyễn Đông Yên (2007), *Giải tích đa trị*, NXB Khoa học Tự nhiên & Công nghệ, Hà Nội.