TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐÀ LẠT

TRẦN TRỊNH MINH SƠN

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CHÍNH QUY CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN TỐI ƯU

Chuyên ngành: Toán Giải tích
Mã số chuyên ngành: 62.46.01.01

TÓM TẮT LUẬN ÁN TIẾN SĨ TOÁN HỌC

Lâm Đồng - 2016

Công trình này được hoàn thành tại Trường Đại học Đà Lạt và Trường Đại học Quốc tế - Đại học Quốc gia TP. HCM.

Hướng dẫn khoa học: GS. TSKH. Phan Quốc Khánh

Luận án sẽ được bảo vệ trước Hội đồng chấm luận án Tiến sĩ
họp tại Trường Đại học Đà Lạt
vào hồi giờ ngày tháng năm

Có thể tìm hiểu luận án tại:
- Trung tâm thông tin - Thư viện Đại học Đà Lạt
- Website http://www.dlu.edu.vn

Danh sách các bài báo liên quan đến luận án

[KLS1] P. Q. Khanh, L. M. Luu, T. T. M. Son (2013), *Well-posedness of a parametric traffic network problem*, Nonlinear Anal. RWA. 14: 1643-1654.

[KLS2] P. Q. Khanh, L. M. Luu, T. T. M. Son (2016), *On the stability and Levitin-Polyak well-posedness of parametric multi-objective generalized games*, Vietnam J. Math., DOI: 10.1007/s10013-016-0189-8.

[KS1] P. Q. Khanh, T. T. M. Son (2015), *Approximations of quasi-variational inequalities and applications*, J. Global Optim., submitted for publication.

[KS2] P. Q. Khanh, T. T. M. Son (2015), *Uniqueness and error bounds of equilibrium flows of traffic networks*, Optim. Letter, submitted for publication.

[KS3] P. Q. Khanh, T. T. M. Son (2015), *Density and connectedness of approximate-solution sets of set-valued Ky Fan inequalities*, Math. Meth. Oper. Res., submitted for publication.

LỜI GIỚI THIỆU

Luận án trình bày một số kết quả mới về các tính chất chính quy của nghiệm một số bài toán trong tối ưu hóa. Các tính chất ở đây là một số tính chất quan trọng có liên quan với nhau: tính xấp xỉ, tính ổn định nghiệm, tính đặt chỉnh, tính duy nhất nghiệm, tính chất liên thông của nghiệm tối ưu và cận sai số của biến chấp nhận được. Các bài toán chúng tôi xét không phải là bài toán cực tiểu, mô hình chính nhất trong tối ưu hóa, mà là một số mô hình khác có ý nghĩa thực tế cao cũng thường gọi là các bài toán liên quan đến tối ưu: từ bất đẳng thức Ky Fan (còn được gọi là bài toán cân bằng), tựa bất đẳng thức biến phân là các mô hình tổng quát hơn bài toán cực tiểu đến các bài toán rất thực tiễn là trò chơi không hợp tác (cũng còn được gọi là bài toán cân bằng Nash), bài toán mạng giao thông, và nền kinh tế thuần túy trao đổi. Luận án có 5 chương.

Chương 1 trình bày một số định nghĩa và kiến thức chuẩn bị phục vụ cho các chương sau.

Chương 2 nghiên cứu về tính xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và áp dụng cho các bài toán cụ thể như: bài toán cân bằng Nash mở rộng, nền kinh tế thuần túy trao đổi và bài toán mạng giao thông. Chương này đưa ra định nghĩa về các song hàm có giá trị hữu hạn trên miền không chữ nhật cho các bài toán trên, chứng minh xấp xỉ theo nghĩa hội tụ lopside của các song hàm tương ứng các bài toán xấp xỉ đến song hàm của bài toán gốc và thiết lập hội tụ theo nghĩa Painlevé-Kuratowski cho các tập nghiệm tương ứng.

Chương 3 nghiên cứu trò chơi đa mục tiêu mở rộng trong không gian véctơ tôpô. Điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của tập các điểm cân bằng Pareto-Nash yếu xấp xỉ và điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh Levitin-Polyak được chứng minh dưới giả thiết compắc. Trong trường hợp trò chơi được xét trong không gian mêtric, tính đặt chỉnh Levitin-Polyak được thiết lập dựa vào các độ đo không compắc.

Chương 4 gồm hai mảng kết quả. Đầu tiên chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ về tính duy nhất nghiệm và các cận sai số cho các dòng chấp nhận được của mạng giao thông bằng cách sử dụng hàm đánh giá cho tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng. Tiếp theo chúng tôi đưa ra các định nghĩa về dòng cân bằng Wardrop xấp xỉ của mạng giao thông và trình bày mối quan hệ của dòng cân bằng xấp xỉ với nghiệm xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng và thiết lập điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh Tikhonov theo nghĩa Levitin–Polyak của mạng giao thông có tham số.

Chương 5 nghiên cứu vô hướng hóa cho các tập nghiệm yếu xấp xỉ của các bất đẳng thức Ky Fan đa trị dưới các giả thiết lồi suy rộng, trình bày tính trù mật của các tập nghiệm xấp xỉ và thiết lập điều kiện đủ cho tính liên thông của các tập nghiệm xấp xỉ và các tập nghiệm yếu xấp xỉ của các bài toán này mà không sử dụng các giả thiết về tính đơn điệu và tính compắc.

Hầu hết các kết quả của chúng tôi nêu trong luận án đã được báo cáo tại

- Seminar của bộ môn Tối ưu và Hệ thống, Đại học Khoa học Tự nhiên TP. HCM.
- The 8th Vietnam-Korea Workshop on Mathematical Optimization Theory and Appications, University of Dalat, 8 - 10/12/2011.
- The First Vietnam-France Congress of Mathematics, University of Hue, 20 - 24/8/2012.
- International Spring School and Workshop on Analysis and Approximation in Optimization under Uncertainty, Ha Noi, 18 - 23/02/2013.
- Hội thảo Tối ưu và Tính toán khoa học lần thứ 11, Ba Vì, 24 - 27/04/2013.
- Đại hội Toán học toàn quốc lần thứ 8. Trường Sĩ quan Kỹ thuật Thông tin, Nha Trang, 10 - 14/08/2013.

Các kết quả của luận án đã được công bố trong 2 bài báo được đăng ở tạp chí Nonlinear Analysis: Real World Applications [KLS1] và tạp chí Vietnam Journal of Math [KLS2] và 3 bài báo đang gửi đăng [KS1, KS2, KS3].

Trong bản tóm tắt này chúng tôi giữ nguyên số thứ tự các định nghĩa, định lý, tài liệu trích dẫn... như trong luận án.

Chương 2
TÍNH XẤP XỈ CỦA BÀI TOÁN TỰA BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN ĐA TRỊ VÀ CÁC ÁP DỤNG

2.1 Hội tụ lopside cho song hàm có giá trị hữu hạn trên miền không chữ nhật

Xét các không gian Banach hữu hạn chiều $\mathbb{B}^m$ và $\mathbb{B}^n$. Cho C, C^ν là các tập con của $\mathbb{B}^m$, D, D^ν là các tập con của $\mathbb{B}^n$ và các ánh xạ đa trị $\mathcal{D}^\nu : C^\nu \rightrightarrows D^\nu$, $\mathcal{D} : C \rightrightarrows D$. Giả sử $C^\nu \xrightarrow{P-K} C$, $\mathcal{D}^\nu \xrightarrow{c} \mathcal{D}$ ứng với $C^\nu \xrightarrow{P-K} C$ tại mỗi $x \in C$. Xét các song hàm $\psi^\nu : C^\nu \times \mathcal{D}^\nu(C^\nu) \to \mathbb{R}$ và $\psi : C \times \mathcal{D}(C) \to \mathbb{R}$. Chúng ta vẫn ký hiệu lớp các song hàm này là fv-biv$(\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$.

Định nghĩa 2.1.1 *Các song hàm ψ^ν thuộc* fi-biv$(\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$ *được gọi là hội tụ lopside tới song hàm ψ thuộc* fi-biv$(\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$ *nếu*

(a) *với mọi $x^\nu \in C^\nu$ với $x^\nu \to x$ và $y \in \mathcal{D}(x)$, tồn tại $y^\nu \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu)$ sao cho $y^\nu \to y$ và*

$$\text{limsup}_\nu \psi^\nu(x^\nu, y^\nu) \le \psi(x, y);$$

(b) *với mọi $x \in C$, tồn tại $x^\nu \in C^\nu$ sao cho $x^\nu \to x$ và với mọi $y^\nu \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu)$ với $y^\nu \to y$,*

$$\text{liminf}_\nu \psi^\nu(x^\nu, y^\nu) \ge \psi(x, y).$$

Hội tụ lopside được gọi là chặt một phần nếu (b) *được thay bởi*

(b-t) (b) *thỏa và, với $\epsilon > 0$, ta có thể tìm một tập compắc D_ϵ chỉ phụ thuộc vào dãy x^ν cho trước sao cho, với ν đủ lớn,*

$$\inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu) \cap D_\epsilon} \psi^\nu(x^\nu, y) \le \inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x^\nu)} \psi^\nu(x^\nu, y) + \epsilon.$$

Cuối cùng, hội tụ lopside được gọi là chặt hoàn toàn nếu nó chặt một phần và (a) *được thay bởi*

(a-t) (a) *thỏa và, với mọi $\epsilon > 0$, tồn tại một tập compắc C_ϵ sao cho, với ν đủ lớn,*

$$\sup_{x \in C^\nu \cap C_\epsilon} \inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x)} \psi^\nu(x, y) \ge \sup_{x \in C^\nu} \inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x)} \psi^\nu(x, y) - \epsilon.$$

Trên miền không chữ nhật $\{(x,y)|x \in C, y \in \mathcal{D}(x)\}$, $\bar{x}$ được gọi là điểm maxinf của ψ ứng với $C, \mathcal{D}(\cdot)$ nếu

$$\bar{x} \in \arg\max_{x \in C}[\inf_{y \in \mathcal{D}(x)} \psi(x,y)].$$

Lưu ý rằng, hội tụ lopside trong Định nghĩa 2.1.1 không đối xứng với hội tụ lopside theo nghĩa minsup, xem [32]. Sau đây, chúng ta trình bày tính chất biến phân của hội tụ lopside

Định lý 2.1.3 *Cho các song hàm ψ^ν, ψ thuộc* fi-biv$(\mathbb{B}^m \times \mathbb{B}^n)$. *Khi đó,*

(a) *nếu ψ^ν hội tụ lopside chặt một phần đến ψ và $\inf_{\mathcal{D}(x)} \psi(x,\cdot)$ là hữu hạn với mọi $x \in C$ thì mỗi điểm tụ $\bar{x}$ của các điểm maxinf ứng với $C^\nu, \mathcal{D}^\nu(\cdot)$ của các song hàm ψ^ν là điểm maxinf ứng với $C, \mathcal{D}(\cdot)$ của song hàm giới hạn ψ;*

(b) *nếu hội tụ này là chặt hoàn toàn và $\sup_{x\in C} \inf_{y \in \mathcal{D}(x)} \psi(x,y)$ là hữu hạn thì*

$$\sup_{x \in C^\nu} \inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x)} \psi^\nu(x,y) \to \sup_{x \in C} \inf_{y \in \mathcal{D}(x)} \psi(x,y),$$

hơn nữa, nếu $\bar{x}$ là điểm maxinf của ψ thì ta luôn tìm được

$$x^\nu \in \operatorname{argmax}(\inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(\cdot)} \psi^\nu(\cdot, y))$$

sao cho $x^\nu \to \bar{x}$. Ngược lại, nếu dãy này tồn tại thì

$$\sup_{x \in C^\nu} \inf_{y \in \mathcal{D}^\nu(x)} \psi^\nu(x,y) \to \inf_{y \in \mathcal{D}(\bar{x})} \psi(\bar{x}, y).$$

2.2 Tính xấp xỉ của các bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị

Xét hai ánh xạ đa trị $T : \mathbb{B}^m \rightrightarrows (\mathbb{B}^m)^*$ và $K : \mathbb{B}^m \rightrightarrows \mathbb{B}^m$. Bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị được định nghĩa như sau:

QVI(T,K) tìm $\bar{x} \in K(\bar{x})$ sao cho $\exists \bar{t} \in T(\bar{x}), \forall y \in K(\bar{x}), \langle \bar{t}, y - \bar{x} \rangle \geq 0$.

Xét song hàm sau đây tương ứng với QVI(T,K)
$\hat{\varphi}:$ Fix$(K) \times \mathbb{B}^m \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ được xác định bởi công thức

$$\hat{\varphi}(x,y) := \sup_{t \in T(x)} \langle t, y - x \rangle. \tag{2.3}$$

Với mỗi $x \in \text{ Fix}(K)$ cố định, rõ ràng $\hat{\varphi}(x,\cdot)$ lồi trong $\mathbb{B}^m$.

Bổ đề 2.2.1 *Xét bài toán* $\text{QVI}(T,K)$, *nếu* $\text{dom}K \subseteq \text{dom}T$ *và* $\hat{\varphi}$ *xác định bởi (2.3). Khi đó,* $\partial\hat{\varphi}(x,\cdot)(x) = \text{clconv}T(x)$ *với mọi* $x \in \text{Fix}(K)$ *trong đó* ∂ *là dưới vi phân của hàm lồi.*

Chúng ta xét song hàm có giá trị hữu hạn tương ứng với bài toán $\text{QVI}(T,K)$ khi T và K có giá trị lồi đóng như sau, với $x \in \text{Fix}(K)$ và $y \in K(x)$,

$$\varphi(x,y) := \sup_{t\in T(x)} \langle t, y-x\rangle. \tag{2.7}$$

Khi đó $\bar{x}$ là điểm maxinf của φ ứng với $\text{ Fix}(K), K(\cdot)$ là

$$\bar{x} \in \text{argmax}_{x\in \text{ Fix}(K)}[\inf_{y\in K(x)} \varphi(x,y)].$$

Đặt

$$\hat{\varphi}(\bar{x},x) \; := \begin{cases} \varphi(\bar{x},x) & \text{với } x \in K(\bar{x}), \\ \infty & \text{ngược lại,} \end{cases}$$

Quan hệ tương đương giữa nghiệm của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và điểm maxinf của song hàm được trình bày trong định lý sau đây.

Định lý 2.2.2 *Xét bài toán* $\text{QVI}(T,K)$, *giả sử rằng* $\text{dom}K \subseteq \text{dom}T$, K *và* T *có giá trị lồi đóng. Khi đó,*

(a) $\bar{x}$ *là nghiệm của bài toán* $\text{QVI}(T,K)$ *nếu và chỉ nếu* $\bar{x}$ *là điểm cực tiểu toàn cục của* $\varphi(\bar{x},\cdot)$ *trên* $K(\bar{x})$;

(b) $\bar{x}$ *là nghiệm của bài toán* $\text{QVI}(T,K)$ *nếu và chỉ nếu* $\bar{x}$ *là điểm* maxinf *của* φ *ứng với* $\text{Fix}(K)$, $K(\cdot)$.

Hội tụ của các tập điểm bất động của các ánh xạ đa trị được trình bày trong bổ đề sau đây.

Bổ đề 2.2.3 *Cho* $C \subseteq \mathbb{B}^m$ *là tập compắc khác rỗng và các ánh xạ đa trị* G^ν, G *đi từ* C *vào* $\mathbb{B}^m$. *Giả sử* G^ν *và* G *có giá trị lồi compắc và Lipschitz trên* C *với cùng hằng số Lipschitz* $L \in [0,1)$ *và* $G^\nu \overset{c}{\to} G$ *trên* C. *Khi đó,* $\text{Fix}(G^\nu) \xrightarrow{P-K} \text{Fix}(G)$.

Sau đây chúng ta xét điều kiện đủ cho sự hội tụ các miền hữu hiệu của các ánh xạ đa trị.

Bổ đề 2.2.4 *Cho G và $G^\nu, \nu \in \mathbb{N}$, là các ánh xạ đa trị đi từ $\mathbb{B}^m$ vào $\mathbb{B}^m$ và G^ν hội tụ graph đến G. Khi đó, $\mathrm{dom}G^\nu \xrightarrow{P-K} \mathrm{dom}G$ nếu G^ν là lồi và G là bị chặn hoặc G^ν có đồ thị bị chặn phần cuối. Kết luận này vẫn đúng khi hội tụ graph được thay bởi hội tụ liên tục hoặc các dạng hội tụ này được thay bằng hội tụ trên $\left(\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{dom}G^\nu\right) \bigcup \mathrm{dom}G$.*

Các bài toán xấp xỉ của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị $\mathrm{QVI}(T, K)$ có dạng sau đây

$$\begin{array}{c}\mathrm{QVI}(T^\nu, K^\nu) \quad \text{tìm } x^\nu \in K^\nu(x^\nu) \text{ sao cho} \\ \exists t^\nu \in T^\nu(x^\nu), \forall y \in K^\nu(x^\nu), \langle t^\nu, y - x^\nu\rangle \geq 0,\end{array}$$

trong đó $T^\nu : \mathbb{B}^m \rightrightarrows (\mathbb{B}^m)^*$ và $K^\nu : \mathbb{B}^m \rightrightarrows \mathbb{B}^m$. Ta ký hiệu $\mathcal{Q}$ và $\mathcal{Q}^\nu$ lần lượt là các tập nghiệm của $\mathrm{QVI}(T, K)$ và $\mathrm{QVI}(T^\nu, K^\nu)$. Áp dụng Định lý 2.2.2(b), ta có $\mathcal{Q}^\nu$ là tập các điểm maxinf của các song hàm có giá trị hữu hạn được cho bởi công thức $\varphi^\nu(x, y) := \sup_{t\in T^\nu(x)}\langle t, y - x\rangle$ với $x \in \mathrm{Fix}(K^\nu)$ và $y \in K^\nu(x)$.

Điều kiện đủ cho $\mathcal{Q}^\nu$ hội tụ Painlevé-Kuratowski đến $\mathcal{Q}$ được trình bày trong định lý sau đây.

Định lý 2.2.5 *Với các bài toán $\mathrm{QVI}(T, K)$ và $\mathrm{QVI}(T^\nu, K^\nu)$, giả sử rằng các điều kiện sau thỏa mãn*

(i) *T^ν có giá trị lồi đóng, đồ thị bị chặn phần cuối và hội tụ graph đến T;*

(ii) *K^ν, K là Lipschitz trên $\left(\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{Fix}(K^\nu)\right) \bigcup \mathrm{Fix}(K)$ với cùng hằng số $L \in [0, 1)$;*

(iii) *K^ν là lồi với giá trị đóng, $K^\nu \xrightarrow{c} K$ trên $\left(\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{Fix}(K^\nu)\right) \bigcup \mathrm{Fix}(K)$ và K bị chặn;*

(iv) *$\mathrm{dom}K \subseteq \mathrm{dom}T$ và $\mathrm{dom}K^\nu \subseteq \mathrm{dom}T^\nu$ với ν đủ lớn.*

Khi đó, φ^ν hội tụ lopside đến φ ứng với K^ν, K và $\mathcal{Q}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{Q}$.

2.3 Tính xấp xỉ của bài toán cân bằng Nash mở rộng

Chúng ta xét trò chơi không hợp tác gồm I người chơi. Mỗi người chơi i cần tìm véctơ chiến thuật $x_i := (x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k_i}}) \in \mathbb{B}^{k_i}$ với k_i thành phần. Véctơ $x := (x_1, \ldots, x_I) \in \mathbb{B}^n$ là biến quyết định của I người chơi, trong đó $n = \sum_{i=1}^{I} k_i$. Để phân biệt người chơi thứ i, ta sử dụng ký hiệu $x := (x_i, x_{\hat{i}})$. Mỗi người chơi i có hàm mục tiêu $\theta_i : \mathbb{B}^n \to \mathbb{R}$ phụ thuộc và tất cả các người chơi còn lại. Hơn nữa, tập các chiến thuật của người chơi i phụ thuộc vào $x_{\hat{i}}$ của những người chơi khác. Khi đó, ta có ánh xạ đa trị $X_i : \mathbb{B}^{\hat{i}} \rightrightarrows \mathbb{B}^{k_i}$. Ký hiệu $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_I)$ và $X(x) := (X_1(x_{-1}), \ldots, X_I(x_{-I})) = \{y \in \mathbb{B}^n | y_i \in X_i(x_{\hat{i}}), \forall i = 1, \ldots, I\}$, với $x \in \mathbb{B}^n$.

Véctơ chiến thuật $\bar{x}$ của I người chơi được gọi là cân bằng Nash mở rộng nếu không có người chơi nào có thể cải thiện hàm mục tiêu của mình bằng cách tự thay đổi chiến thuật của người đó, nghĩa là $\bar{x} \in X(\bar{x})$ sao cho, với mọi $i \in \{1, \ldots, I\}$,

$$\theta_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \leq \theta_i(x_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \text{ với mọi } x_i \in X_i(\bar{x}_{\hat{i}}).$$

Trường hợp tập chiến thuật của mỗi người chơi không phụ thuộc vào chiến thuật của những người chơi còn lại thì khái niệm này trở thành khái niệm cân bằng Nash cổ điển.

Ký hiệu GNEP(θ, X) là trò chơi cân bằng mở rộng.

Đặt $N^a_\theta : \mathbb{B}^n \rightrightarrows (\mathbb{B}^n)^*$ sao cho, với mỗi $x \in \mathbb{B}^n$,

$$N^a_\theta(x) := F_1(x) \times \cdots \times F_N(x),$$

ở đó

$$F_i(x) := \begin{cases} \bar{B}^i(0,1) & \text{nếu } x_i \in \ \operatorname{argmin}_{\mathbb{B}^{k_i}} \theta_i(\cdot, x_{\hat{i}}), \\ \operatorname{conv}(N^a_{\theta_i}(x_i) \cap S^i(0,1)) & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$

$\bar{B}^i(0,1) := \{z \in \mathbb{B}^{k_i} : \|z\| \leq 1\}$ và $S^i(0,1) := \{z \in \mathbb{B}^{k_i} : \|z\| = 1\}$.

Theo Định lý 4.2 trong [6], ta có mối quan hệ tương đương giữa điểm cân bằng Nash mở rộng của trò chơi không hợp tác và nghiệm của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng như sau.

Bổ đề 2.3.1 *Giả sử rằng, với $i \in I$, hàm mục tiêu θ_i là liên tục và tựa lồi nửa chặt tương ứng với biến thứ i và X có giá trị lồi. Khi đó, $\bar{x}$ là nghiệm của* GNEP(θ, X) *nếu và chỉ nếu $\bar{x}$ là nghiệm của* QVI(N^a_θ, X).

Giả sử rằng $\mathbb{B}^n$ là không gian Euclide. Chúng ta sẽ thiết lập tính xấp xỉ của GNEP(θ, X) theo nghĩa hội tụ graph của các ánh xạ đa trị $N^a_{\theta^\nu}$ đến N^a_θ và hội tụ liên tục của ánh xạ chiến thuật X^ν đến X, ở đó $N^a_{\theta^\nu}$ và X^ν được định nghĩa tương tự như N^a_θ và X. Ký hiệu $\mathcal{G}$ và $\mathcal{G}^\nu$ lần lượt là tập các điểm cân bằng Nash mở rộng của GNEP(θ, X) và GNEP(θ^ν, X^ν) tương ứng.

Định lý 2.3.2 *Giả sử rằng, với mỗi $i \in I$,*

(i) θ_i *và* θ_i^ν *là liên tục và tựa lồi nửa chặt ứng với biến thứ* i;

(ii) $N_{\theta^\nu}^a$ *có đồ thị bị chặn phần cuối và hội tụ graph đến* N_θ^a;

(iii) X^ν *là Lipschitz trên* $\left(\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{Fix}(X^\nu)\right) \bigcup \mathrm{Fix}(X)$ *với cùng hằng số* L *thuộc* $[0, 1)$;

(iv) $X^\nu \overset{c}{\to} X$ *trên* $\left(\bigcup_{\nu\in\mathbb{N}} \mathrm{Fix}(X^\nu)\right) \bigcup \mathrm{Fix}(X)$, X^ν *là lồi có giá trị đóng và* X *bị chặn*;

(v) $\mathrm{dom}\mathcal{X} \subseteq \mathrm{dom}N_\theta^a$, $\mathrm{dom}\mathcal{X}^\nu \subseteq \mathrm{dom}N_{\theta^\nu}^a$ *với* ν *đủ lớn.*

Khi đó, $\mathcal{G}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{G}$.

2.4 Tính xấp xỉ của nền kinh tế thuần túy trao đổi

Xét nền kinh tế thuần túy trao đổi gồm có n đại lý, mỗi đại lý được gán chỉ số $i \in I := \{1, \ldots, n\}$ và l mặt hàng, mỗi mặt hàng được đánh số thứ tự $j \in J := \{1, \ldots, l\}$. Ta ký hiệu e_{i_j} và x_{i_j} lần lượt là số lượng mặt hàng j được sở hữu và tiêu thụ bởi đại lý i. Khi đó, $e_i := (e_{i_1}, \ldots, e_{i_l}) \in \mathbb{B}_+^l$ và $x_i := (x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}) \in \mathbb{B}_+^l$ lần lượt là các véctơ đặc trưng cho lượng hàng hóa ban đầu và lượng tiêu thụ của đại lý i và $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{B}^{n\times l}$ đại diện cho lượng tiêu thụ của thị trường. Giả sử rằng mỗi đại lý i đại diện cho sản phẩm j mà $e_{i_j} > 0$ với mọi $j \in J$. Với mỗi sản phẩm $j \in J$, có giá không âm p_j tương ứng. Ký hiệu $p := (p_1, \ldots, p_l) \in \mathbb{B}_+^l$ là véctơ giá và p thuộc tập

$$P := \{p \in \mathbb{B}_+^l | \sum_{j=1}^{l} p_j = 1\}.$$

Trong mô hình kinh tế thuần túy trao đổi, các đại lý tác động với nhau theo quy luật cung cầu nhằm xác định giá cả, số lượng hàng hoá và các dịch vụ trên thị trường. Khi đó, mỗi x_i sẽ có hàm lợi nhuận $u_i : \mathbb{B}_+^l \to \mathbb{R}$ tương ứng. Vì các đại lý đều mong muốn có tỷ suất lợi nhuận tối đa nên ta có bài toán tối ưu, với mọi $i \in I$ và với mọi $p \in P$,

$$\text{tìm } \bar{x}_i \in M_i(p) \text{ sao cho } u_i(\bar{x}_i) = \max_{x_i \in M_i(p)} u_i(x_i),$$

ở đó ánh xạ đa trị $M_i : P \rightrightarrows \mathbb{B}_+^l$ được cho bởi công thức

$$M_i(p) := \{x_i \in \mathbb{B}_+^l | \langle p, x_i\rangle \le \langle p, e_i\rangle\}$$

là tập ràng buộc về ngân sách của đại lý i ứng với giá p. Với $\bar{p} \in P$ và $\bar{x} \in \prod_{i\in I} M_i(\bar{p})$, véctơ $(\bar{p}, \bar{x})$ được gọi là điểm cân bằng cạnh tranh của nền kinh tế thuần túy trao đổi nếu

$$u_i(\bar{x}_i) = \max_{x_i \in M_i(\bar{p})} u_i(x_i), \text{với mọi } i \in I,$$

$$\sum_{i\in I} (\bar{x}_{i_j} - e_{i_j}) \leq 0, \text{với mọi } j \in J.$$

Ta có nhận xét, với mọi $p \in P$, nếu $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n\times l}$ sao cho, với mọi $i \in I$, $\hat{x}_i$ là nghiệm của bài toán tối ưu $\max_{x_i\in M_i(p)} u_i(x_i)$, thì luật cân bằng Walras thỏa mãn theo nghĩa hẹp nếu

$$\langle p, \sum_{i\in I} (\hat{x}_i - e_i)\rangle = 0. \tag{2.11}$$

Với mọi $i \in I$, ta xét ánh xạ đa trị $G_i : \mathbb{R}^l_+ \rightrightarrows \mathbb{R}^l$ được cho bởi công thức

$$G_i(x_i) := \begin{cases} \bar{B}^i(0,1) & \text{nếu } x^i \in \ \text{argmin}_{\mathbb{B}^l_+}(-u_i), \\ \text{conv}(N^a_{-u_i}(x_i) \cap S^i(0,1)) & \text{trong trường hợp ngược lại,} \end{cases}$$

Đặt $M(p) := (M_1(p), \ldots, M_n(p)), G(x) := (G_1(x_1), \ldots, G_n(x_n))$ và $u := (u_1, \ldots, u_n)$.

Mối quan hệ tương đương giữa điểm cân bằng cạnh tranh và nghiệm của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị được trình bày trong bổ đề sau, xem Định lý 3.2 trong [14].

Bổ đề 2.4.1 *Giả sử rằng u_i là liên tục và tựa lõm nửa chặt với mọi $i \in I$ và* (2.11) *thỏa. Khi đó, $(p, x) \in P \times M(p)$ là cân bằng cạnh tranh của* PEE$(u, P \times M)$ *khi và chỉ khi (p, x) là nghiệm của* QVI$(G, P \times M)$.

Ta ký hiệu PEE$(u, P \times M)$ cho bài toán tìm các điểm cân bằng cạnh tranh và $\mathcal{P}$ là tập nghiệm của PEE$(u, P \times M)$. Ta xét các nền kinh tế thuần túy trao đổi PEE$(u^\nu, P \times M^\nu)$ xấp xỉ, ở đó M^ν, u^ν được định nghĩa tương tự như M, u. Ký hiệu $\mathcal{P}^\nu$ là tập các điểm cân bằng cạnh tranh của PEE$(u^\nu, P \times M^\nu)$.

Định lý 2.4.2 *Giả sử rằng, với mỗi $i \in I$, các điều kiện sau đây thỏa*

(i) *u_i và u_i^ν là liên tục và tựa lõm nửa chặt và* (2.11) *thỏa*;

(ii) *G^ν có đồ thị bị chặn phần cuối và G^ν hội tụ graph đến G*;

(iii) M^ν *là lồi và Lipschitz trên* P *với cùng hằng số* L *thuộc* $[0,1)$ *và* M *bị chặn;*

(iv) $\mathrm{dom}M \subseteq \mathrm{dom}G$ *và* $\mathrm{dom}M^\nu \subseteq \mathrm{dom}G^\nu$ *với* ν *đủ lớn.*

Khi đó, $\mathcal{P}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{P}$.

2.5 Tính xấp xỉ của bài toán cân bằng giao thông

Bài toán mạng giao thông được định nghĩa như sau. Cho N là tập các nút, L là tập các cung, $W = (W_1, \dots, W_l)$ là tập các cặp đầu/cuối. Giả sử cặp đầu/cuối $W_j, j = 1, \dots, l$, được nối bởi tập các đường P_j và P_j có $r_j \geq 1$ đường. Xét $F = (F_1, \dots, F_m)$ là véctơ dòng đường, với $m = r_1 + \dots + r_l$. Xét tập các véctơ dòng đường có ràng buộc tải năng

$$F \in A := \{F \in \mathbb{B}^m : 0 \leq F_s \leq \gamma_s, s = 1, \dots, m\},$$

trong đó γ_s là các số thực cho trước. Giả sử hơn nữa rằng giá lưu thông trên dòng đường F_s, $s = 1, \dots, m$, phụ thuộc vào véctơ dòng đường F và $T_s(F) \subseteq \mathbb{R}_+$. Khi đó ta có ánh xạ đa trị $T : \mathbb{B}^m_+ \rightrightarrows \mathbb{B}^m_+$, với $T(F) = (T_1(F), \dots, T_m(F))$.

Dạng mở rộng của nguyên lý cân bằng Wardrop trong trường hợp hàm giá đa trị được phát biểu trong định nghĩa sau đây, xem [35].

Định nghĩa 2.5.1 *Véctơ dòng đường* $H \in A$ *được gọi là dòng cân bằng nếu, với mỗi cặp đầu/cuối* W_j, $j = 1, \dots, l$, *và với mọi đường* q, s *nối cặp đầu/cuối này (nghĩa là* $q, s \in P_j$*) thì tồn tại giá* $t \in T(H)$ *sao cho*

$$t_q < t_s \Longrightarrow H_q = \gamma_q \ \textit{hoặc}\ H_s = 0.$$

Giả sử rằng nhu cầu lưu thông ρ_j của cặp đầu/cuối $W_j, j = 1, \dots, l$, phụ thuộc vào dòng cân bằng H. Khi xét tất cả các cặp đầu/cuối, ta có ánh xạ $\rho : \mathbb{B}^m_+ \to \mathbb{B}^l_+$. Ta sử dụng ký hiệu Kronecker sau

$$\phi_{js} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } s \in P_j, \\ 0 \text{ nếu } s \notin P_j. \end{cases}$$

Khi đó, $\phi = \{\phi_{js}\}, j = 1, \dots, l, s = 1, \dots, m$, được gọi là ma trận chỉ định đầu/cuối-đường đi. Các véctơ dòng đường thỏa mãn nhu cầu được gọi là các véctơ dòng đường chấp nhận được, khi đó tập ràng buộc cho dòng cân bằng H là

$$K(H) := \{F \in A : \phi F = \rho(H)\}.$$

Tương tự như các kết quả của M. J. Smith [71], trong [35] đã thiết lập quan hệ tương đương sau đây.

Bổ đề 2.5.2 *Véctơ dòng đường $H \in K(H)$ là dòng cân bằng nếu và chỉ nếu nó là nghiệm của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân sau*

QVI(T, K) *tìm $H \in K(H)$ sao cho tồn tại $t \in T(H)$ thỏa mãn $\forall F \in K(H)$,*

$$\langle t, F - H \rangle \geq 0.$$

Ta ký hiệu mạng giao thông là TNP(T, ρ) và tập các dòng cân bằng của nó là $\mathcal{T}$. Giả sử rằng không gian các dòng đường $\mathbb{B}^m$ là không gian Euclide.

Bổ đề 2.5.5

(i) *Giả sử rằng ρ^ν là liên tục và hội tụ liên tục đến ρ trên A. Khi đó, K^ν hội tụ liên tục đến K trên A, trong đó $K^\nu(H) := \{F \in A |\ \phi F = \rho^\nu(H)\}$ và $K(H) := \{F \in A |\ \phi F = \rho(H)\}$. Kéo theo, K^ν hội tụ graph đến K. Hơn nữa, K là liên tục trên A.*

(ii) *Nếu tồn tại $\bar{H} \in A$ sao cho các hàm ρ^ν là Lipschitz trong lân cận của $\bar{H}$ với cùng hằng số Lipschitz $k > 0$, khi đó K^ν là Lipschitz trên A với cùng hằng số Lipschitz.*

Từ các kết quả trên ta có thể thiết lập tính xấp xỉ của mạng giao thông bằng cách xét sự hội tụ graph của T^ν đến T và sự hội tụ liên tục của ρ^ν đến ρ. Với mỗi $\nu \in \mathbb{N}$, ký hiệu $\mathcal{T}^\nu$ là tập các dòng cân bằng của TNP(T^ν, ρ^ν).

Định lý 2.5.6 *Giả sử rằng*

(i) *T^ν có giá trị lồi compắc, có đồ thị bị chặn phần cuối và hội tụ graph đến T;*

(ii) *ρ^ν hội tụ liên tục đến ρ trên A và tồn tại $\bar{H} \in A$ sao cho ρ^ν là Lipschitz địa phương tại $\bar{H}$ với cùng hằng số Lipschitz k sao cho $k < \frac{1}{\hat{\alpha}(\gamma\sqrt{\gamma}+1)(h-1)}$ với mọi $h > 1$, ở đó*

$$\hat{\alpha} := \min_{E \subseteq J} \min\{\| \sum_{j \in E} \lambda_j \phi_j \| |\ 0 \leq \lambda_j, \sum_{j \in E} \lambda_j = 1\} \quad \text{và } \gamma = \max_s \{\gamma_s\};$$

(iii) *K^ν là lồi với mọi ν, $\mathrm{dom}K \subseteq \mathrm{dom}T$ và $\mathrm{dom}K^\nu \subseteq \mathrm{dom}T^\nu$ với ν đủ lớn.*

Khi đó, $\mathcal{T}^\nu \xrightarrow{P-K} \mathcal{T}$.

Chương 3
TÍNH ỔN ĐỊNH VÀ TÍNH ĐẶT CHỈNH LEVITIN-POLYAK CỦA TRÒ CHƠI ĐA MỤC TIÊU MỞ RỘNG CÓ THAM SỐ

3.1 Trò chơi đa mục tiêu mở rộng

Cho I là đếm được, Với mỗi $i \in I$, X^i là tập con của không gian véctơ tôpô Hausdorff E^i. Đặt $X := \prod_{i\in I} X^i, X^{\hat{i}} := \prod_{j\in I, j\neq i} X^j$. Với $x \in X$, ta ký hiệu $x := (x_i, x_{\hat{i}})$ với x_i và $x_{\hat{i}}$ lần lượt là phép chiếu của x lên X^i và $X^{\hat{i}}$. Xét $f_i : X \to Y^i$ là hàm giá véctơ của người chơi thứ i trong đó Y^i là không gian véctơ tôpô Hausdorff được sắp thứ tự từng phần bởi nón lồi đóng nhọn với phần trong khác rỗng $C_i \subseteq Y^i$. Vì các chiến thuật của người chơi i phụ thuộc vào chiến thuật của những người chơi khác nên ta có ánh xạ đa trị $G_i : X^{\hat{i}} \rightrightarrows X^i$. Trò chơi đa mục tiêu mở rộng, với các ánh xạ và các tập như trên, được ký hiệu là $\mathrm{MGG}(f, G)$ trong đó $f := \prod_{i\in I} f_i$ và $G := \prod_{i\in I} G_i$.

Tập A trong không gian véctơ tôpô được gọi là tập cân nếu $tA \subseteq A$ với mỗi số thực $|t| \leq 1$. Với mỗi $i \in I$, cho ${B^o}_{E^i}$ và B_i^o lần lượt là các lân cận mở cân tại gốc của E^i và Y^i. Cho B_{E^i} và B_i lần lượt là bao đóng của ${B^o}_{E^i}$ và B_i^o. Đặt $C_i^c := Y^i \setminus \mathrm{int}C_i$.

Định nghĩa 3.1.2 *Với $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \in \mathbb{R}^3_+$, véctơ chiến thuật $\bar{x} := (\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}})$ thuộc X được gọi là cân bằng Pareto-Nash yếu xấp xỉ của* $\mathrm{MGG}(f, G)$ *nếu, với mọi $i \in I, \bar{x}_i \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}) + \epsilon_1 B_{E^i})$ và, với mọi $y_i \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}) + \epsilon_2 B_{E^i})$, $f_i(y_i, \bar{x}_{\hat{i}}) - f_i(\bar{x}_i, \bar{x}_{\hat{i}}) \in \epsilon_3 B_i + C_i^c$.*

Trong chương này, chúng ta xét Định nghĩa 3.1.2 trong trường hợp đặc biệt với $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 := \epsilon \geq 0$. Ký hiệu $\mathcal{M}(\epsilon)$ là tập các điểm cân bằng Pareto-Nash yếu xấp xỉ của $\mathrm{MGG}(f, G)$ với mỗi $\epsilon \geq 0$.

Giả sử rằng trò chơi đa mục tiêu mở rộng $\mathrm{MGG}(f, G)$ bị nhiễu bởi tham số λ thuộc không gian tôpô Hausdorff Λ. Khi đó f_i và G_i trở thành $f_i : X \times \Lambda \to Y^i$ và $G_i : X^{\hat{i}} \times \Lambda \rightrightarrows X^i$. Ta gọi $\{\mathrm{MGG}(f, G)_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ là họ các trò chơi đa mục tiêu mở rộng, hoặc trò chơi đa mục tiêu có tham số, để thuận tiện ta ký hiệu là họ $\{\mathrm{MGG}(f, G)_\Lambda\}$, trong đó $\mathrm{MGG}(f, G)_\lambda$ là trò chơi tương ứng với λ. Với $\epsilon \geq 0$, họ $\{\mathrm{MGG}(f, G)_\Lambda\}$ có ánh xạ nghiệm xấp xỉ là $(\lambda, \epsilon) \mapsto \mathcal{M}(\lambda, \epsilon)$. Trong chương này, ta sử dụng thuật ngữ ánh xạ nghiệm nếu như không cần nhấn mạnh cân bằng Pareto-Nash yếu.

3.2 Tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm xấp xỉ

Chúng ta xét các tập nghiệm xấp xỉ cho trường hợp trò chơi có hữu hạn người chơi như sau. Với $\lambda \in \Lambda$, $\epsilon \geq 0$ và $\delta > 0$,

$\mathcal{M}_\delta(\lambda,\epsilon) := \{x \in X |\ \forall i \in I, x_i \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}},\lambda)+\epsilon B_{E^i})$, và, với mọi $y_i \in X^i \cap (G_i(x_{\hat{i}},\lambda)+\epsilon B_{E^i})$, $f_i(y_i,x_{\hat{i}},\lambda)-f_i(x_i,x_{\hat{i}},\lambda) \in (\delta+\epsilon)B_i + C_i^c\}$,

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\delta(\lambda,\epsilon) := \begin{cases} \mathcal{M}(\lambda,0) & \text{nếu } \epsilon = 0, \\ \mathcal{M}_\delta(\lambda,\epsilon) & \text{ngược lại.} \end{cases}$$

Định lý 3.2.1 *Giả sử rằng I là hữu hạn, X^i là compắc, $G_i(\cdot,\cdot)$ là liên tục với giá trị đóng trên $X^{\hat{i}} \times \{\lambda^0\}$, và $f_i(\cdot,\cdot,\cdot)$ là liên tục trên $X^i \times X^{\hat{i}} \times \{\lambda^0\}$ với mọi $i \in I$. Khi đó, $\widetilde{\mathcal{M}}_\delta(\cdot,\cdot)$ là nửa liên tục dưới tại $(\lambda^0, 0)$ với $\delta > 0$.*

3.3 Tính đặt chỉnh Levitin-Polyak của trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số

Trong mục này chúng ta thiết lập tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$ với tập I đếm được.

Định nghĩa 3.3.1 *$\bar{x}^n$ được gọi là dãy xấp xỉ Pareto-Nash yếu tương ứng với dãy $\lambda^n \to \bar{\lambda}$ nếu $\exists \epsilon^n \to 0_+, \forall i \in I, \forall n \in \mathbb{N}, \bar{x}_i^n \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}^n, \lambda^n) + \epsilon^n B_{E^i})$ và, với mọi $y_i \in X^i \cap (G_i(\bar{x}_{\hat{i}}^n,\lambda^n) + \epsilon^n B_{E^i})$,*

$$f_i(y_i, \bar{x}_{\hat{i}}^n, \lambda^n) - f_i(\bar{x}_i^n, \bar{x}_{\hat{i}}^n, \lambda^n) \in \epsilon^n B_i + C_i^c.$$

Định nghĩa 3.3.2 $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$ *được gọi là đặt chỉnh (Levitin-Polyak) (đặt chỉnh (Levitin-Polyak) duy nhất tương ứng) tại $\bar{\lambda}$ nếu*

(a) *tập nghiệm $\mathcal{M}(\bar{\lambda},0)$ của $\mathrm{MGG}(f,G)_{\bar{\lambda}}$ khác rỗng (duy nhất nghiệm tương ứng);*

(b) *với mỗi $\lambda^n \to \bar{\lambda}$, mỗi dãy xấp xỉ Pareto-Nash yếu tương ứng với λ^n có dãy con hội tụ đến một phần tử của $\mathcal{M}(\bar{\lambda},0)$ (phần tử duy nhất của $\mathcal{M}(\bar{\lambda}0)$, tương ứng).*

Định lý 3.3.5 *Giả sử rằng X^i là compắc, $G_i(\cdot,\cdot)$ là liên tục với giá trị đóng trên $X^{\hat{i}} \times \{\bar{\lambda}\}$, và $f_i(\cdot,(\cdot,\cdot))$ là C_i^c-tựa đóng dưới trên $X^i \times (X^{\hat{i}} \times \{\bar{\lambda}\})$ với mọi $i \in I$. Khi đó, $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$ là đặt chỉnh tại $\bar{\lambda}$. Hơn* *nữa, nếu $\mathcal{M}(\bar{\lambda},0)$ là duy nhất nghiệm thì $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$ là đặt chỉnh duy nhất tại $\bar{\lambda}$.*

Khi X^i là không gian mêtric với $i \in I$, giả thiết compắc trên X^i sẽ được loại bỏ. Lúc này đường kính và độ đo không compắc của các tập nghiệm xấp xỉ sẽ giữ vai trò quyết định. Tính đặt chỉnh sẽ phụ thuộc vào việc những đại lượng này có dần về 0 hay không. Trong phần còn lại của chương chúng ta xét Λ, X^i là các không gian mêtric.

Cho hai số dương ζ và ϵ, tập nghiệm xấp xỉ của họ $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$ khi tham số thay đổi xung quanh điểm đang xét $\bar{\lambda}$ được cho bởi công thức sau

$$\Pi(\bar{\lambda},\zeta,\epsilon) := \bigcup_{\lambda\in\bar{B}(\bar{\lambda},\zeta)} \mathcal{M}(\lambda,\epsilon).$$

Định nghĩa 3.3.8 *Cho M là tập con khác rỗng của không gian mêtric X và $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Độ đo không compắc Kuratowski của M là*

$$\mu(M) := \inf\{\epsilon > 0 | M \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} M_k \text{ và } \mathrm{diam} M_k \le \epsilon, k = 1,\dots,n\}.$$

(b) *Độ đo không compắc Hausdorff của M là*

$$\eta(M) := \inf\{\epsilon > 0 | M \subseteq \textstyle\bigcup_{k=1}^{n} B(x_k,\epsilon), x_k \in X\}.$$

(c) *Độ đo không compắc Istrătescu của M là*

$$\iota(M) := \inf\{\epsilon > 0 | M \text{ không có vô hạn các tập con } \epsilon\text{-tách}\}.$$

Định lý 3.3.9 *Xét $\mathbf{r} \in \{\mu,\eta,\iota\}$.*

(a) *Nếu $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$ là đặt chỉnh tại $(\bar{\lambda},0)$ thì $\mathbf{r}(\Pi(\bar{\lambda},\zeta,\epsilon)) \to 0_+$ khi $(\zeta,\epsilon) \to (0_+,0_+)$.*

(b) *Ngược lại, nếu X là không gian mêtric đủ, Λ là compắc hoặc hữu hạn chiều và, với mọi $i \in I$, các điều kiện sau đây thỏa mãn*

(i) *G_i là liên tục với giá trị compắc trên $X^{\hat{i}} \times \Lambda$,*

(ii) *f_i là (b-C_i^c)-tựa đóng dưới trên $X^i \times (X^{\hat{i}} \times \Lambda)$*

với mọi $b > 0$,

khi đó, $\{\mathrm{MGG}(f,G)_\Lambda\}$ là đặt chỉnh tại $(\bar{\lambda},0)$, nếu $\mathbf{r}(\Pi(\bar{\lambda},\zeta,\epsilon)) \to 0_+$ khi $(\zeta,\epsilon) \to (0_+,0_+)$.

Chương 4
CẬN SAI SỐ VÀ TÍNH ĐẶT CHỈNH CỦA MẠNG GIAO THÔNG

4.1 Tính duy nhất nghiệm và cận sai số của mạng giao thông

Trước tiên, chúng ta nhắc lại định nghĩa về hàm đánh giá của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị.

Định nghĩa 4.1.1 *Hàm* $g : \mathrm{Fix}(K) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *được gọi là hàm đánh giá của* $\mathrm{QVI}(T, K)$ *nếu như hai điều kiện sau thỏa mãn:*
(i) $g(x) \geq 0$, *với mỗi* $x \in \mathrm{Fix}(K)$*;*

(ii) $g(x) = 0$ *và* $x \in \mathrm{Fix}(K)$ *nếu và chỉ nếu* x *là nghiệm của* $\mathrm{QVI}(T, K)$.

Xét hàm $f : \mathrm{Fix}(K) \to \mathbb{R}$ được cho bởi $f(x) = -\inf_{y \in K(x)} \varphi(x, y)$, với song hàm $\varphi :\ \mathrm{Fix}(K) \times K(x) \to \mathbb{R}$ xác định như sau,

$$\varphi(x, y) := \sup_{t \in T(x)} \langle t, y - x \rangle + \langle P(y - x), y - x \rangle \qquad (4.1)$$

ở đó $P : \mathbb{B}^m \to (\mathbb{B}^m)^*$ là ánh xạ tuyến tính được biểu diễn bởi ma trận đối xứng xác định dương cũng được ký hiệu là P.

Bổ đề sau chứng tỏ rằng f là hàm đánh giá của $\mathrm{QVI}(T, K)$.

Bổ đề 4.1.2 *Xét bài toán* $\mathrm{QVI}(T, K)$*, giả sử* $\mathrm{Fix}(K) \subseteq \mathrm{dom}T$*,* K *và* T *có giá trị lồi đóng. Khi đó,* f *là hàm đánh giá của* $\mathrm{QVI}(T, K)$.

Xét mạng giao thông trong Mục 2.4 của Chương 2. Chúng ta cần kết quả sau để xét cận sai số cho bài toán này.

Bổ đề 4.1.3 *Giả sử rằng, với mỗi số thực* $\alpha > 0$*, hàm nhu cầu* ρ *là Hölder calm với số mũ* α *tại* $\bar{H} \in A$*, nghĩa là, tồn tại số thực* $k > 0$ *sao cho*

$$\|\rho(H) - \rho(\bar{H})\| \leq k\|H - \bar{H}\|^{\alpha}, \forall H \in A,$$

khi đó K *là Hölder calm với số mũ* α *tại* $\bar{H}$*, nghĩa là, tồn tại số thực* $L > 0$ *sao cho*

$$K(H) \subseteq K(\bar{H}) + \bar{B}(0, L\|H - \bar{H}\|^{\alpha}), \forall H \in A.$$

Ánh xạ đa trị $G : \mathbb{B}^m \rightrightarrows \mathbb{B}^n$ là tập điểm bất động đối xứng, xem [6], nếu nó thỏa tính chất sau

$$\forall x \in \ \mathrm{Fix}(G), \forall y \in G(x), \text{ ta có } x \in G(y).$$

Định lý 4.1.5 *Với dòng cân bằng $\bar{H} \in A$, giả sử rằng*

(i) *T có giá trị lồi compắc khác rỗng và đơn điệu mạnh với hệ số $\mu > 0$ trên $K(\bar{H})$;*

(ii) *$K(\bar{H})$ là lồi đóng và K là tập điểm bất động đối xứng;*

(iii) *P (được định nghĩa trong (4.1)) thỏa điều kiện $\|P\| < \mu$;*

(iv) *$\mathrm{Fix}(K) \subseteq \mathrm{dom}T$.*

Khi đó, $\bar{H}$ là dòng cân bằng duy nhất trên $K(\bar{H})$ và, với mỗi $H \in K(\bar{H})$,

$$\|H - \bar{H}\| \leq \sqrt{\frac{f(H)}{\mu - \|P\|}}.$$

Định lý 4.1.6 *Với dòng cân bằng $\bar{H} \in A$, $M := \sup\{\|\tau\| | \ \tau \in T(\bar{B}(\bar{H}, 1))\}$ và P (được định nghĩa trong (4.1)), giả sử rằng*

(i) *T có giá trị lồi compắc khác rỗng và đơn điệu mạnh với hệ số $\mu > 0$ trên $K(\bar{H})$;*

(ii) *ρ là Hölder calm với số mũ $\alpha > 2$ tại $\bar{H}$ và L là hệ số được xác định bởi tính Hölder calm của K với số mũ α trong Bổ đề 4.1.3.*

(iii) *tồn tại $\eta \in (0,1)$ thỏa $\chi := \mu - ML\eta^{\alpha-2} - \|P\|(1 - 2L - L^2) > 0$;*

(iv) *$\mathrm{Fix}(K) \subseteq \mathrm{dom}T$.*

Khi đó, $\bar{H}$ là dòng cân bằng duy nhất trong $\bar{B}(\bar{H}, \eta) \cap K(\bar{H})$ và, với mọi $H \in \bar{B}(\bar{H}, \eta) \cap K(\bar{H})$,

$$\|H - \bar{H}\| \leq \sqrt{\frac{f(H)}{\chi}}.$$

4.2 Nghiệm xấp xỉ của mạng giao thông

Cho $\delta \geq 0$, tập nghiệm xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân QVI(T, K) được xác định như sau

$$\mathcal{Q}(\delta) := \{H \in K(H) | \ \exists t \in T(H) \text{ sao cho } \forall F \in K(H), \ \langle t, F - H\rangle + \delta \geq 0\}.$$

Xét $0 \leq e \leq \frac{1}{2}\min_{s=1,\ldots,m}\{\gamma_s\}$.

Định nghĩa 4.2.1 *Véctơ dòng đường $H \in K(H)$ được gọi là dòng cân bằng xấp xỉ tương ứng với e (viết tắt là, dòng e-cân bằng) nếu, với mỗi cặp đầu/cuối W_j, $j = 1, \ldots, l$, và mọi đường q, s nối cặp đầu cuối này (nghĩa là $q, s \in P_j$), tồn tại giá $t \in T(H)$ sao cho*

$$t_q < t_s \implies H_q \in [\gamma_q - e, \gamma_q] \text{ hoặc } H_s \in [0, e].$$

Ký hiệu $\mathcal{T}(e)$ là tập các dòng e-cân bằng của TNP(T, ρ). Giả sử rằng

$$\kappa := \sup_{H \in A} \sup_{t \in T(H)} \sup_{p=1,\ldots,m} \{t_p\} < +\infty.$$

Mệnh đề 4.2.3 *Với e và κ ở trên, ta có $\mathcal{T}(e) \subseteq \mathcal{Q}(m\kappa e)$.*

Với dòng $\bar{H} \in K(\bar{H})$ cho trước, ký hiệu

$$\beta_{\bar{H}} := \inf\{|t_s - t_q| | \forall t \in T(\bar{H}), t_s \neq t_q\}.$$

Mệnh đề 4.2.5 *Nếu $\bar{H} \in \mathcal{Q}(\frac{\beta_{\bar{H}} e}{2})$ thì $\bar{H} \in \mathcal{T}(e)$, nghĩa là,*

$$\mathcal{Q}(\frac{\beta_{\bar{H}} e}{2}) \subseteq \mathcal{T}(e).$$

Để xét xấp xỉ đồng thời cho cả bất đẳng thức và ràng buộc, ta có khái niệm về nghiệm xấp xỉ bất đẳng thức-ràng buộc cho QVI(T, K) như sau.

Với $\delta \geq 0$ và $\omega \geq 0$ đã cho ở trên. Ký hiệu

$$\mathcal{Q}(\delta, \omega) := \{\bar{H} \in A \cap (K(\bar{H}) + \omega B^{\Pi}) | \exists t \in T(\bar{H}), \forall F \in A \cap (K(\bar{H}) + \omega B^{\Pi}),$$

$$\langle t, F - \bar{H} \rangle + \delta \geq 0\}$$

là tập các nghiệm δ-ω xấp xỉ của QVI(T, K).

Định nghĩa 4.2.8 *Cho e như trong Định nghĩa 4.2.1 và $\omega \geq 0$. Véctơ dòng đường H được gọi là dòng cân bằng xấp xỉ ràng buộc (tương ứng với e và ω) nếu $H \in A \cap (K(H) + \omega B^{\Pi})$ và, với mọi W_j, $j = 1, \ldots, l$, và mọi $q, s \in P_j$, tồn tại $t \in T(H)$ sao cho*

$$t_q < t_s \Longrightarrow H_q \in [\gamma_q - e, \gamma_q] \text{ hoặc } H_s \in [0, e].$$

Khi đó dòng H được gọi là dòng e-ω-cân bằng.

Ký hiệu $\mathcal{T}(e,\omega)$ là tập các dòng e-ω-cân bằng. Ta có mối quan hệ sau.

Mệnh đề 4.2.9 *Với e trong Định nghĩa 4.2.1 và $\omega \geq 0$ ta có*

$$\mathcal{T}(e,\omega) \subseteq \mathcal{Q}(m\kappa(2\omega + e), \omega).$$

Với $\bar{H} \in A \cap (K(\bar{H}) + \omega B^{\Pi})$, đặt

$$\beta_{\bar{H}} := \inf\{|t_s - t_q| | \forall t \in T(\bar{H}), t_s \neq t_q\}.$$

Tương tự Mệnh đề 4.25, lưu ý rằng $\beta_{\bar{H}}$ phụ thuộc vào ω, ta có.

Mệnh đề 4.2.11 *Với e trong Định nghĩa 4.2.1 và $\omega \geq 0$, nếu $\bar{H} \in \mathcal{Q}(\frac{\beta_{\bar{H}} e}{2}, \omega)$, thì $\bar{H} \in \mathcal{T}(e,\omega)$, nghĩa là, $\mathcal{Q}(\frac{\beta_{\bar{H}} e}{2}, \omega) \subseteq \mathcal{T}(e,\omega)$.*

4.3 Tính đặt chỉnh của mạng giao thông có tham số

Giả sử rằng giá trên đường bị nhiễu, nghĩa là nó phụ thuộc vào tham số nhiễu u của không gian mêtric U. Khi đó, $T : \mathbb{B}_+^m \times U \rightrightarrows \mathbb{B}_+^m$ là các ánh xạ đa trị với $T(F,u) = (T_1(F,u), \ldots, T_m(F,u))$. Với mỗi $u \in U$, ta có mạng giao thông tham số $\text{TNP}(T,\rho)_u$ và bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tham số tương ứng $\text{QVI}(T,K)_u$. Xét e trong Định nghĩa 4.2.1 và $\delta, \omega \geq 0$, ta ký hiệu các tập nghiệm xấp xỉ tương ứng của $\text{QVI}(T,K)_u$ và $\text{TNP}(T,\rho)_u$ lần lượt là $\mathcal{Q}(\delta,\omega,u)$ và $\mathcal{T}(e,\omega,u)$. Ta gọi $\{\text{QVI}(T,K)_u\}_{u\in U}$ ($\{\text{TNP}(T,\rho)_u\}_{u\in U}$, tương ứng) là họ các tựa bất đẳng thức biến phân đa trị có tham số (họ các mạng giao thông có tham số, tương ứng), để thuận tiện ta ký hiệu $\{\text{QVI}(T,K)_U\}$ ($\{\text{TNP}(T,\rho)_U\}$, tương ứng). Trong phần này, ta chỉ tập trung vào nghiên cứu tính ổn định của tập nghiệm nên luôn giả thiết rằng các tập nghiệm xấp xỉ của hai bài toán này khác rỗng.

Định nghĩa 4.3.1 *H^n là dãy xấp xỉ của $QVI(T,K)_{\bar{u}}$ tương ứng với $u^n \to \bar{u}$ nếu tồn tại các dãy ω^n và δ^n, cùng hội tụ về 0_+, sao cho, với mọi $n \in \mathbb{N}$, $H^n \in A \cap (K(H^n) + \omega^n B^{\Pi})$, và tồn tại $t^n \in T(H^n, u^n)$ sao cho, với mọi $F \in A \cap (K(H^n) + \omega^n B^{\Pi})$, ta có*

$$\langle t^n, F - H^n \rangle + \delta^n \geq 0.$$

Định nghĩa 4.3.2 $\{\text{QVI}(T,K)_U\}$ *được gọi là đặt chỉnh (đặt chỉnh duy nhất tương ứng) tại $\bar{u}$ nếu*

(a) *Tập nghiệm* $\mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$ *của* $\mathrm{QVI}(T,K)_{\bar{u}}$ *khác rỗng (duy nhất nghiệm tương ứng);*

(b) *Với mỗi dãy* $u^n \to \bar{u}$*, mỗi dãy xấp xỉ của* $\mathrm{QVI}(T,K)_{\bar{u}}$ *tương ứng với* u^n *có dãy con hội tụ về một phần tử (hội tụ về nghiệm duy nhất tương ứng) của* $\mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$.

Định lý 4.3.3 *Giả sử rằng* $K(\cdot)$ *là liên tục với giá trị compắc trên* A *và* $T(\cdot,\cdot)$ *là nửa liên tục trên với giá trị compắc trên* $A \times \{\bar{u}\}$*. Khi đó,* $\{\mathrm{QVI}(T,K)_U\}$ *là đặt chỉnh tại* $\bar{u}$*. Hơn nữa, nếu* $\mathcal{Q}(0,0,\bar{u})$ *là duy nhất nghiệm thì* $\{\mathrm{QVI}(T,K)_U\}$ *là đặt chỉnh duy nhất.*

Sau đây chúng ta thiết lập tính đặt chỉnh cho mạng giao thông có tham số.

Định nghĩa 4.3.4 H^n *được gọi là dãy xấp xỉ của* $\mathrm{TNP}(T,\rho)_{\bar{u}}$ *tương ứng với dãy* $u^n \to \bar{u}$ *nếu tồn tại các dãy* ω^n *và* e^n*, cùng hội tụ đến* 0_+*, với* $0 \le e^n \le \frac{1}{2}\min_{s=1,\dots,m}\{\gamma_s\}$*, sao cho* $H^n \in A \cap (K(H^n) + \omega^n B^{\Pi})$ *và, với mọi* $W_j, j = 1,\dots,l$*, và mọi* $q,s \in P_j$*, tồn tại* $t^n \in T(H^n,u^n)$ *thỏa mãn*

$$t_q^n < t_s^n \Longrightarrow H_q^n \in [\gamma_q - e^n, \gamma_q] \text{ hoặc } H_s^n \in [0, e^n].$$

Định nghĩa 4.3.5 $\{TNP(T,\rho)_U\}$ *được gọi là đặt chỉnh (đặt chỉnh duy nhất tương ứng) tại* $\bar{u}$ *nếu*

(a) *Tập nghiệm* $\mathcal{T}(0,0,\bar{u})$ *của* $\mathrm{TNP}(T,\rho)_{\bar{u}}$ *khác rỗng (duy nhất nghiệm tương ứng);*

(b) *với mỗi dãy* $u^n \to \bar{u}$*, mỗi dãy xấp xỉ của* $\mathrm{TNP}(T,\rho)_{\bar{u}}$ *tương ứng với* u^n *có một dãy con hội tụ về một phần tử (hội tụ về nghiệm duy nhất tương ứng) của* $\mathcal{T}(0,0,\bar{u})$.

Điều kiện đủ cho tính đặt chỉnh theo tham số của $\{\mathrm{TNP}(T,\rho)_U\}$ được cho bởi định lý sau.

Định lý 4.3.6 *Giả sử rằng* ρ *là liên tục trên* A *và* $T(\cdot,\cdot)$ *là nửa liên tục trên với giá trị compắc trên* $A\times\{\bar{u}\}$*. Khi đó,* $\{\mathrm{TNP}(T,\rho)_U\}$ *là đặt chỉnh tại* $\bar{u}$*. Hơn nữa, nếu* $\mathcal{T}(0,0,\bar{u})$ *là duy nhất nghiệm, thì* $\{\mathrm{TNP}(T,\rho)_U\}$ *là đặt chỉnh duy nhất.*

Chương 5
TÍNH LIÊN THÔNG CỦA CÁC TẬP NGHIỆM XẤP XỈ CỦA BẤT ĐẲNG THỨC KY FAN ĐA TRỊ

5.1 Bất đẳng thức Ky Fan đa trị

Xét X, Y, Z là các không gian định chuẩn, $C \subseteq Y$ là nón lồi nhọn với phần trong $\text{int}C \neq \emptyset$. Cho Y^* là không gian tôpô đối ngẫu của Y, và

$$C^* := \{\xi \in Y^* | \langle \xi, y \rangle \geq 0, \forall y \in C\}.$$

là nón đối ngẫu của nón C. Nón đối ngẫu chặt của C được cho bởi

$$C^\sharp := \{\xi \in Y^* | \langle \xi, y \rangle > 0, \forall y \in C \setminus \{0_Y\}\}.$$

Cho $A \subseteq X, B \subseteq Z$ là các tập con khác rỗng và ánh xạ đa trị $F : X \times Z \rightrightarrows Y$. Chúng ta xét bất đẳng thức Ky Fan đa trị sau đây

KFI(F, A, B) tìm $\bar{x} \in A$ sao cho, với mọi $z \in B$,

$$F(\bar{x}, z) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

Ký hiệu $\mathcal{K}$ là tập nghiệm của KFI(F, A, B) (còn được biết với tên khác là tập nghiệm hữu hiệu của KFI(F, A, B)). Nếu $\bar{x} \in A$ thỏa, với mọi $z \in B$,

$$F(\bar{x}, z) \cap (-\text{int}C) = \emptyset,$$

thì $\bar{x}$ được gọi là nghiệm yếu của KFI(F, A, B) và $\mathcal{K}^w$ là tập nghiệm yếu của KFI(F, A, B).

Với mỗi điểm cố định $e \in \text{int}C$ và $\epsilon \geq 0$,

$$\mathcal{K}(\epsilon) := \{x \in A | (F(x, z) + \epsilon e) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset, \forall z \in B\} \text{ và}$$

$$\mathcal{K}^w(\epsilon) := \{x \in A | (F(x, z) + \epsilon e) \cap (-\text{int}C) = \emptyset, \forall z \in B\}$$

lần lượt là tập nghiệm xấp xỉ và tập các nghiệm yếu xấp xỉ của KFI(F, A, B) tương ứng với ϵ.

Với mỗi $\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$,

$$\mathcal{K}(\epsilon, \xi) := \{x \in A | \ \langle \xi, F(x, z) \rangle + \epsilon \subseteq \mathbb{R}_+, \forall z \in B\}$$

là tập nghiệm xấp xỉ của bất đẳng thức Ky Fan vô hướng tương ứng với KFI(F, A, B) và ξ. Giả sử rằng $\mathcal{K}(0, \xi) \neq \emptyset$ với mọi $\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$.

Các ký hiệu $C_e^* := \{\xi \in C^* | \langle \xi, e \rangle = 1\}$ và $C_e^\sharp := \{\xi \in C^\sharp | \langle \xi, e \rangle = 1\}$ sẽ được sử dụng thường xuyên trong chương này.

5.2 Vô hướng hóa tuyến tính cho tập nghiệm yếu xấp xỉ

Vô hướng hóa cho tập nghiệm yếu xấp xỉ của $\mathrm{KFI}(F, A, B)$ được trình bày trong định lý sau đây.

Định lý 5.2.1 *Xét* $\mathrm{KFI}(F, A, B)$. *Với mỗi* $\epsilon \geq 0$, *giả sử rằng* $F(x, \cdot)$ *là* C*-dưới giống lồi trên* B *với mỗi* $x \in A$. *Khi đó,*

$$\mathcal{K}^w(\epsilon) = \bigcup_{\xi \in C_e^*} \mathcal{K}(\epsilon, \xi).$$

5.3 Tính nửa liên tục dưới và tính trù mật

Trước tiên, chúng ta thiết lập tính nửa liên tục dưới cho ánh xạ đa trị $\mathcal{K}(\epsilon, \xi)$ ứng với ϵ với mỗi $\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ và ứng với ξ với mỗi $\epsilon \geq 0$.

Định lý 5.3.1 *Xét bài toán* $\mathrm{KFI}(F, A, B)$. *Giả sử rằng* A *là lồi và* $F(\cdot, z)$ *là* C*-lõm trên* A *với mỗi* $z \in B$. *Khi đó,*

(a) $\mathcal{K}(\cdot, \xi)$ *là nửa liên tục dưới trên* $(0, +\infty)$ *với mỗi* $\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$;

(b) $\mathcal{K}(\cdot, \xi)$ *là nửa liên tục dưới tại 0 với mỗi* $\xi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ *nếu tồn tại nghiệm chặt* x *của* $\mathrm{KFI}(F, A, B)$ *theo nghĩa, tồn tại* $y_0 \in \mathrm{int}C$ *và mọi* $z \in B$, $F(x, z) + y_0 \subseteq \mathrm{int}C$.

Định lý 5.3.2 *Xét bài toán* $\mathrm{KFI}(F, A, B)$. *Giả sử rằng các điều kiện sau thỏa mãn.*

(i) A *là lồi và* $F(\cdot, z)$ *là* C*-lõm trên* A *với mỗi* $z \in B$;

(ii) $F(x, \cdot)$ *là* C*-dưới giống lồi trên* B *với mỗi* $x \in A$ *và* $F(A, B)$ *bị chặn*;

(iii) *tồn tại nghiệm chặt* x *của* $\mathrm{KFI}(F, A, B)$ *theo nghĩa, tồn tại* $y_0 \in \mathrm{int}C$ *và mọi* $z \in B$, $F(x, z) + y_0 \subseteq \mathrm{int}C$.

Khi đó, $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ *là nửa liên tục dưới trên* $C^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ *(với tôpô chuẩn trong* C^**) với* $\epsilon \geq 0$.

Ta nhắc lại rằng, hàm véctơ $g : X \to Y$ được gọi là C-nửa liên tục trên tại x nếu, với mỗi lân cận V của $g(x)$, tồn tại lân cận U của x sao cho $g(U) \subseteq V - C$.

Hệ quả 5.3.3 *Xét* $\mathrm{KFI}(F, A, B)$. *Giả sử rằng* F *là đơn trị và các điều kiện sau đây thỏa*

(i) *A là lồi và compắc, và $F(\cdot, z)$ là C-lõm và C-nửa liên tục trên trên A với mỗi $z \in B$;*

(ii) *$F(x, \cdot)$ là C-dưới giống lồi trên B với mỗi $x \in A$ và $F(A, B)$ bị chặn;*

(iii) *tồn tại nghiệm chặt x của* KFI(F, A, B) *theo nghĩa, tồn tại $y_0 \in \mathrm{int}C$ và mọi $z \in B$, $F(x, z) + y_0 \in \mathrm{int}C$.*

Khi đó, $\mathcal{K}(\epsilon, \cdot)$ là liên tục trên C_e^* với $\epsilon \geq 0$.

Tiếp theo chúng ta thiết lập tính trù mật cho tập nghiệm xấp xỉ của KFI(F, A, B)

Định lý 5.3.4 *Xét bài toán* KFI(F, A, B). *Giả sử rằng các giả thiết của Định lý 5.3.2 thỏa mãn. Khi đó, với mỗi $\epsilon > 0$,*

$$\bigcup_{\xi \in C_e^\sharp} \mathcal{K}(\epsilon, \xi) \subseteq \mathcal{K}(\epsilon) \subseteq \mathrm{cl} \bigcup_{\xi \in C_e^\sharp} \mathcal{K}(\epsilon, \xi).$$

Hơn nữa,

$$\bigcup_{\xi \in C^\sharp} \mathcal{K}(0, \xi) \subseteq \mathcal{K} \subseteq \mathrm{cl} \bigcup_{\xi \in C^\sharp} \mathcal{K}(0, \xi).$$

5.4 Tính liên thông của tập nghiệm xấp xỉ và tập nghiệm yếu xấp xỉ

Mục này thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên thông của các tập nghiệm xấp xỉ và các tập nghiệm yếu xấp xỉ của KFI(F, A, B).

Định lý 5.4.1 *Theo các giả thiết của Định lý 5.3.2, $\mathcal{K}(\epsilon)$ là liên thông với $\epsilon \geq 0$.*

Định lý 5.4.3 *Giả sử rằng các giả thiết được đưa ra trong Định lý 5.3.2 thỏa mãn. Khi đó, $\mathcal{K}^w(\epsilon)$ là liên thông với $\epsilon \geq 0$.*

Định lý 5.4.6 *Giả sử rằng các giả thiết được đưa ra trong Định lý 5.3.2 thỏa mãn. Khi đó, $\mathcal{K}^w(\epsilon)$ là liên thông đường với $\epsilon \geq 0$ nếu như $\mathcal{K}(\epsilon, \xi)$ là duy nhất nghiệm với mọi $\xi \in C_e^*$*

Hệ quả 5.4.7 *Theo các giả thiết của Hệ quả 5.3.3, $\mathcal{K}^w(\epsilon)$ là liên thông đường với $\epsilon \geq 0$.*

KẾT LUẬN CHUNG

Các kết quả chính của luận án này bao gồm:

1. Các điều kiện đủ cho tính xấp xỉ của tựa bất đẳng thức biến phân đa trị (Định lý 2.2.5), bài toán cân bằng Nash mở rộng (Định lý 2.3.2), nền kinh tế thuần túy trao đổi (Định lý 2.4.2) và bài toán cân bằng giao thông (Định lý 2.5.6);

2. Điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm xấp xỉ của trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số (Định lý 3.2.1), điều kiện đủ cho đặt chỉnh Levitin-Polyak cho trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số (Định lý 3.3.5). Điều kiện cần và đủ cho đặt chỉnh Levitin-Polyak cho trò chơi đa mục tiêu mở rộng có tham số trong các không gian mêtric (Định lý 3.3.9);

3. Các điều kiện đủ cho tính duy nhất nghiệm và cận sai số cho các dòng chấp nhận được của bài toán cân bằng giao thông (các Định lý 4.1.5 và 4.1.6);

4. Mối quan hệ giữa các dòng cân bằng xấp xỉ của mạng giao thông và các nghiệm xấp xỉ của bài toán tựa bất đẳng thức biến phân đa trị tương ứng (Các Mệnh đề 4.2.3, 4.2.5, 4.2.9 và 4.2.11);

5. Các điều kiện đủ cho đặt chỉnh Tikhonov theo nghĩa Levitin-Polyak cho tựa bất đẳng thức biến phân đa trị có tham số (Định lý 4.3.3) và mạng giao thông có tham số (Định lý 4.3.6);

6. Điều kiện đủ cho tính chất liên thông của các tập nghiệm xấp xỉ và các tập nghiệm yếu xấp xỉ của bất đẳng thức Kỳ Fan đa trị (các Định lý 5.4.1, 5.4.3 và 5.4.6).

CÁC NGHIÊN CỨU TIẾP THEO

Các vấn đề có thể tiếp tục nghiên cứu dựa trên phương pháp tiếp cận và kết quả của luận án có thể dự kiến như sau:

1. Tính xấp xỉ cho bài toán tối ưu hai mức theo hướng nghiên cứu của [49] và cho bất đẳng thức Ky Fan đa trị;
2. Tính đặt chỉnh Levitin-Polyak cho mạng giao thông có ràng buộc tải năng trên cung;
3. Đánh giá độ nhạy nghiệm cho tựa bất đẳng thức biến phân đa trị và các áp dụng theo hướng nghiên cứu của [62];
4. Cận sai số cho trò chơi đa mục tiêu mở rộng dựa trên hàm đánh giá;
5. Sự tồn tại nghiệm cho trò chơi đa mục tiêu mở rộng và bất đẳng thức Ky Fan đa trị dựa trên kỹ thuật vô hướng hóa.